MATEMÁTICAS B

4.º de Educación Secundaria Obligatoria

Unidad 11

Iniciación a la derivada

Manual del alumnado

Curso 2026–2027

Edición V01 · Índice cerrado el 31 de octubre de 2026

Índice

1 El cambio en situaciones cotidianas 3
1.1 Una magnitud depende de otra . . . 3
1.2 Variación y ritmo de cambio . . . 3
1.3 Media e instante . . . 3
1.4 Practica y razona . . . 3

2 Tasa de variación media 4
2.1 De la variación al cociente . . . 4
2.2 La pendiente de una secante . . . 4
2.3 Tablas y gráficas . . . 4
2.4 Practica y razona . . . 4

3 De la secante a la tangente 5
3.1 Acercar dos puntos . . . 5
3.2 Qué caracteriza una tangente . . . 5
3.3 Exploración guiada . . . 5
3.4 Practica y razona . . . 6

4 Derivada de una función en un punto 7
4.1 Definición y notación . . . 7
4.2 Signo, valor y unidades . . . 7
4.3 Aproximación y justificación . . . 7
4.4 Practica y razona . . . 7

5 La función derivada 8
5.1 De un valor a una nueva función . . . 8
5.2 Leer las dos gráficas . . . 8
5.3 Lectura en sentido inverso . . . 8
5.4 Practica y razona . . . 8

6 Reglas elementales de derivación 9
6.1 Constante, identidad y potencias naturales . . . 9
6.2 Constante multiplicativa, sumas y restas . . . 9
6.3 Un procedimiento breve y revisable . . . 9
6.4 Practica y razona . . . 9

7 Ecuación de la recta tangente 10
7.1 Dos datos necesarios . . . 10
7.2 Tangentes horizontales y a una recta . . . 10
7.3 Comprobación gráfica . . . 10

7.4 Practica y razona 10

8 Crecimiento, decrecimiento y extremos 11
8.1 El signo de la derivada 11
8.2 Máximos, mínimos y tangentes horizontales 11
8.3 Practica y razona 12

9 Continuidad y derivabilidad: una primera mirada 13
9.1 Una implicación en un punto 13
9.2 La esquina de valor absoluto 13
9.3 Reconocer sin generalizar en exceso 13
9.4 Practica y razona 13

10 Calculadora y herramientas digitales 14
10.1 Un cociente que cualquier modelo puede calcular 14
10.2 Incrementos y redondeo 14
10.3 GeoGebra: observar y dejar evidencia 14
10.4 Practica y razona 14

11 Problemas integrados e interpretación 15
11.1 Posición y velocidad 15
11.2 Población y temperatura 15
11.3 Un máximo con un modelo cuadrático 15
11.4 Revisar errores y comunicar 15
11.5 Practica y razona 16

A Formulario y guía de consulta 17
A.1 Variaciones y pendientes 17
A.2 Derivada en un punto y función derivada 17
A.3 Reglas elementales 17
A.4 Tangente, signo y extremos 17
A.5 Continuidad y uso de herramientas 17

B Práctica global 18

C Autoevaluación de 20 preguntas 19

Capítulo 1

El cambio en situaciones cotidianas

1.1 Una magnitud depende de otra

La posición de un móvil depende del tiempo, el coste de una compra depende de la cantidad y una temperatura puede cambiar a lo largo del día. Identificar qué variable depende de cuál y sus unidades ayuda a interpretar las operaciones. Si $s(t)$ está en metros y t en segundos, $s(3)$ es una posición, no una velocidad.

1.2 Variación y ritmo de cambio

Entre dos entradas $a < b$, la variación absoluta es $\Delta f = f(b) - f(a)$; puede ser positiva, negativa o cero. El tiempo o incremento de entrada es $\Delta x = b - a$. Comparar variaciones exige tener en cuenta cuánto ha cambiado la entrada.

Ejemplo resuelto

Una temperatura pasa de 18 a 24 °C en dos horas. Aumenta seis grados y su ritmo medio es $6/2 = 3$ °C/h. Otro aumento de seis grados en tres horas tiene ritmo medio dos grados por hora.

1.3 Media e instante

La velocidad media relaciona desplazamiento y tiempo transcurrido. La instantánea describe el movimiento en un instante: no se calcula dividiendo por un tiempo igual a cero. La rapidez es el módulo de la velocidad instantánea; una velocidad negativa indica sentido de movimiento respecto del eje elegido.

Atención

Volver a la posición inicial da desplazamiento cero, aunque se haya recorrido una distancia positiva. Posición, desplazamiento y distancia no son la misma magnitud.

1.4 Practica y razona

U11-01

La temperatura baja de 25 a 19 °C en tres horas. Calcula variación y ritmo medio.

(Respuesta: -6 °C y -2 °C/h.)

U11-02

Un móvil parte de la posición cero, llega a diez metros y vuelve al origen en cuatro segundos. Calcula desplazamiento y velocidad media; distingue distancia recorrida.

(Respuesta: 0 m, 0 m/s; distancia 20 m.)

U11-03

En un cultivo, $P(2) = 140$ y $P(5) = 200$ bacterias. Calcula aumento y ritmo medio si el tiempo se mide en horas.

(Respuesta: 60 bacterias y 20 bacterias/h.)

Resumen del capítulo

Antes de calcular, distinguir magnitud, variación y ritmo; escribir las unidades de cada resultado.

Capítulo 2

Tasa de variación media

2.1 De la variación al cociente

Para una función definida en a y b, con $a < b$, la tasa de variación media es

$$\mathrm{TVM}_{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Calcula primero los dos valores, resta en el mismo orden y divide por la variación de entrada. Sus unidades son unidades de salida por unidad de entrada.

Ejemplo resuelto

Si $s(t) = t^2 + 2t$ metros, $s(1) = 3$ y $s(3) = 15$. Entre uno y tres segundos, TVM $= (15-3)/(3-1) =$ 6 m/s. Es la velocidad media en ese intervalo, no necesariamente la velocidad en todos sus instantes.

2.2 La pendiente de una secante

La recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es una secante y su pendiente es la TVM. Una pendiente positiva une un punto final más alto; una negativa, uno más bajo; cero significa alturas iguales. Una TVM positiva entre dos extremos no asegura que la función crezca en todo el intervalo.

2.3 Tablas y gráficas

Una tabla proporciona TVM entre sus registros, pero no determina por sí sola lo ocurrido entre ellos. En una gráfica se leen los dos puntos antes de calcular; no se divide la altura entre el tiempo salvo que eso coincida realmente con el cociente de incrementos.

2.4 Practica y razona

U11-04

Halla la TVM de $f(x) = x^2 + 1$ entre 1 y 3.

(Respuesta: 4.)

U11-05

Calcula la TVM de $f(x) = 3x - 2$ entre -1 y 2. Explica por qué no depende del intervalo elegido.

(Respuesta: 3; la gráfica es una recta de pendiente constante.)

U11-06

Para $s(t) = t^2 - 4t$ metros, calcula la velocidad media entre 1 y 3 segundos. ¿Demuestra que estuvo parado todo el tiempo?

(Respuesta: 0 m/s; no.)

Resumen del capítulo

La TVM es variación de salida entre variación de entrada: pendiente de una secante, con unidades.

Capítulo 3

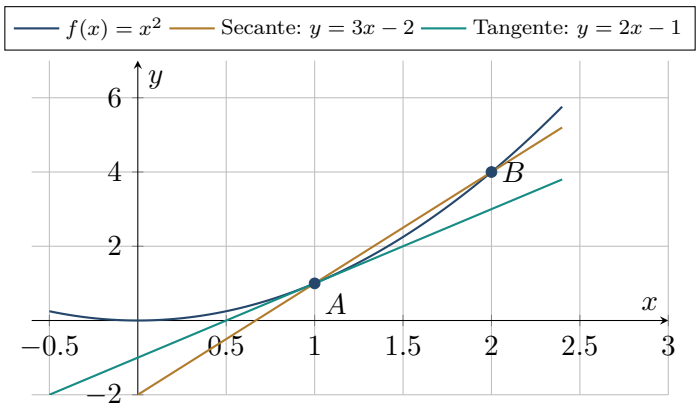
De la secante a la tangente

3.1 Acercar dos puntos

Fijamos $A = (a, f(a))$ y $B = (a+h, f(a+h))$, con $h \neq 0$. Su secante tiene pendiente $[f(a+h)-f(a)]/h$. Al acercar B por ambos lados, cuando sea posible, buscamos una pendiente límite finita común.

Ejemplo resuelto

Para $f(x) = x^2$ y $a = 1$, el cociente es $[(1+h)^2 - 1]/h = 2 + h$ si $h \neq 0$. Con $h = 1; 0{,}5; 0{,}1; 0{,}01$ obtenemos $3; 2{,}5; 2{,}1; 2{,}01$. Con $h = -0{,}1; -0{,}01$, obtenemos $1{,}9; 1{,}99$. Ambos lados sugieren pendiente dos.



3.2 Qué caracteriza una tangente

La tangente describe la dirección local. Puede atravesar la curva: $y = 0$ es tangente a $y = x^3$ en el origen. No se define contando contactos.

3.3 Exploración guiada

Representa $f(x) = x^2$ y fija A en $(1, 1)$. Acerca B por la curva sin hacerlo coincidir con A. Compara la secante con $y = 2x - 1$; la expresión $2 + h$ justifica la tendencia observada.

3.4 Practica y razona

U11-07

Completa las pendientes de secantes de $y = x^2$ en $a = 2$ para $h = 0{,}1; 0{,}01; -0{,}1; -0{,}01$.
(Respuesta: $4{,}1; 4{,}01; 3{,}9; 3{,}99$. Se aproximan a cuatro.)

U11-08

¿Por qué no se toma directamente $h = 0$ en la fórmula de la secante?
(Respuesta: Porque el cociente original queda $0/0$.)

U11-09

¿Puede una tangente atravesar la curva? Usa $y = x^3$ y $y = 0$ en el origen.
(Respuesta: Sí; $y = 0$ es tangente y la curva cambia de lado.)

Resumen del capítulo

La tangente se interpreta como dirección local y límite de pendientes, no contando puntos de contacto.

Capítulo 4

Derivada de una función en un punto

4.1 Definición y notación

En un punto interior a del dominio, si las pendientes se aproximan a un valor común finito, definimos

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Se lee derivada de f en a. Es la tasa instantánea de cambio y la pendiente de la tangente en $(a, f(a))$. El cociente se calcula con $h \neq 0$; el límite describe una tendencia.

Ejemplo resuelto

Para $f(x) = x^2 + 1$ en $a = 1$:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 + 1 - 2}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h.$$

Al tender h a cero, $f'(1) = 2$. El valor de la función y su derivada son conceptos distintos, aunque aquí coincidan numéricamente.

4.2 Signo, valor y unidades

Una derivada positiva indica pendiente local ascendente; una negativa, descendente; cero, tangente horizontal si la derivada existe. Si s se mide en metros y t en segundos, $s'(a)$ se mide en m/s. No se afirma que la función sea positiva por tener derivada positiva.

4.3 Aproximación y justificación

Una tabla sugiere la derivada, pero no demuestra su existencia. Por definición trabajamos solo rectas y parábolas sencillas.

4.4 Practica y razona

U11-10

Calcula por definición $f'(2)$ para $f(x) = x^2$.

(Respuesta: 4.)

U11-11

Calcula por definición $f'(3)$ para $f(x) = 2x + 5$.

(Respuesta: 2.)

U11-12

Si $P(4) = 350$ bacterias y $P'(4) = 20$ bacterias/h, interpreta ambos datos y explica si se conoce exactamente $P(5)$.

(Respuesta: A las cuatro horas hay 350 y la tasa instantánea es 20 bacterias/h; no se conoce exactamente P(5).)

Resumen del capítulo

$f(a)$ es una altura o magnitud; $f'(a)$ es una pendiente o tasa instantánea, con otras unidades.

Capítulo 5

La función derivada

5.1 De un valor a una nueva función

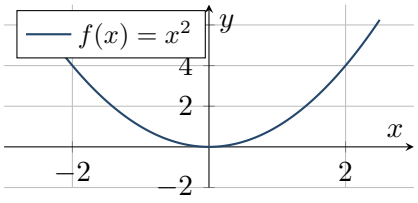
Calcular $f'(a)$ en distintos puntos produce una función, $f'(x)$, allí donde la derivada existe. Primero se obtiene la regla general y después se evalúa: si $f'(x) = 2x$, entonces $f'(3) = 6$. No confundir función derivada con un único número.

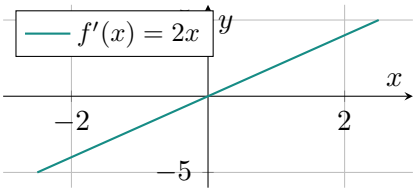
Ejemplo resuelto

Para $f(x) = x^2$, el cociente general es $[(x+h)^2 - x^2]/h = 2x + h$. Al tender h a cero resulta $f'(x) = 2x$. Para $f(x) = 5$, la derivada es cero; para $f(x) = 3x - 2$, es tres.

5.2 Leer las dos gráficas

La gráfica de f muestra alturas; la de f' muestra pendientes de f. Donde la parábola x^2 desciende, $2x$ es negativa; en su vértice vale cero; donde asciende es positiva. La derivada de una recta es una función constante, y su gráfica es horizontal.





5.3 Lectura en sentido inverso

Si sabemos que $f'(x) = 2$ en un intervalo, sabemos que f tiene pendiente constante dos en él, pero no su altura inicial. Las rectas $2x + 1$ y $2x - 4$ tienen la misma derivada: conocer ritmos no determina por sí solo todos los valores originales.

5.4 Practica y razona

U11-13

Para $f(x) = x^2$, escribe $f'(x)$ y calcula $f'(-2)$, $f'(0)$ y $f'(3)$.

(Respuesta: $2x$; $-4, 0, 6$.)

U11-14

Una recta tiene ecuación $f(x) = -2x + 7$. Describe la gráfica de su derivada.

(Respuesta: La recta horizontal $y = -2$.)

U11-15

Dos funciones tienen derivada constante tres en un intervalo. ¿Deben tener los mismos valores? Da dos ejemplos.

(Respuesta: No: $3x + 1$ y $3x - 5$.)

Resumen del capítulo

La gráfica de la derivada representa pendientes; su signo se interpreta respecto del cambio de la función original.

Capítulo 6

Reglas elementales de derivación

6.1 Constante, identidad y potencias naturales

La derivada de una constante es cero y la de x es uno. Para una potencia de exponente natural $n \geq 1$,

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Multiplica por el exponente y réstale uno. $x^0 = 1$ es constante y se deriva como tal. No se pide demostrar la regla general.

6.2 Constante multiplicativa, sumas y restas

Para funciones derivables, $(cf)' = cf'$ y $(f \pm g)' = f' \pm g'$. Conserva los coeficientes y signos de cada término. En polinomios, deriva término a término.

Ejemplo resuelto

$f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 7$ tiene derivada $20x^3 - 6x$. La constante siete desaparece; en $-3x^2$, el coeficiente menos tres multiplica al dos. Para evaluar en cero se usa la expresión ya obtenida, sin inventar una división entre x.

6.3 Un procedimiento breve y revisable

Identifica los términos, deriva cada uno, simplifica y, si se pide una pendiente en un punto, sustituye después. Escribe el nombre de la función derivada; una respuesta numérica no sustituye a $f'(x)$ cuando se pide la función completa.

Atención

La derivada de x^3 es $3x^2$, no x^2; la de una constante es cero, no esa misma constante.

6.4 Practica y razona

U11-16

Deriva $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 7$ y calcula $f'(1)$.

(Respuesta: $20x^3 - 6x$ y 14.)

U11-17

Deriva $g(x) = -2x^3 + 4x - 9$ y calcula $g'(0)$.

(Respuesta: $-6x^2 + 4$ y 4.)

U11-18

Un alumno deriva $3x^2 - 5$ y obtiene $2x - 5$. Detecta y corrige sus dos errores.

(Respuesta: La derivada correcta es $6x$.)

Resumen del capítulo

Potencias naturales, coeficientes, sumas y restas bastan para derivar los polinomios de esta iniciación.

Capítulo 7

Ecuación de la recta tangente

7.1 Dos datos necesarios

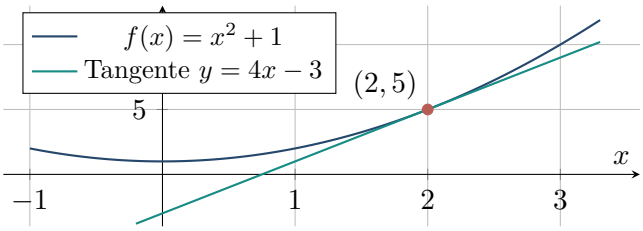
Para hallar una tangente se necesitan el punto $(a, f(a))$ y la pendiente $m = f'(a)$. La ecuación punto-pendiente es

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Calcula ambos datos por separado; no uses $(a, f'(a))$ como punto de la curva.

Ejemplo resuelto

En $f(x) = x^2 + 1$, para $a = 2$: $f(2) = 5$, $f'(x) = 2x$ y $f'(2) = 4$. La tangente es $y - 5 = 4(x - 2)$, es decir, $y = 4x - 3$. Comprueba que pasa por $(2, 5)$ y tiene pendiente cuatro.



7.2 Tangentes horizontales y a una recta

Si $f'(a) = 0$, queda $y = f(a)$, una recta horizontal. Si la función original ya es una recta, su tangente coincide con ella. No hace falta que el punto esté en el eje de abscisas para que la tangente sea horizontal.

7.3 Comprobación gráfica

Representa curva y tangente en los mismos ejes: comparten punto y dirección local. Comprueba también punto y pendiente mediante sustitución.

7.4 Practica y razona

U11-19

Obtén la tangente a $f(x) = x^2$ en $x = 1$.

(Respuesta: $y = 2x - 1$.)

U11-20

Obtén la tangente a $f(x) = x^2 - 4x + 1$ en $x = 2$.

(Respuesta: $y = -3$.)

U11-21

Halla la tangente a $f(x) = 3x - 2$ en $x = 4$.

(Respuesta: $y = 3x - 2$.)

Resumen del capítulo

Punto de tangencia y pendiente son datos diferentes; comprobar ambos evita confundir función y derivada.

Capítulo 8

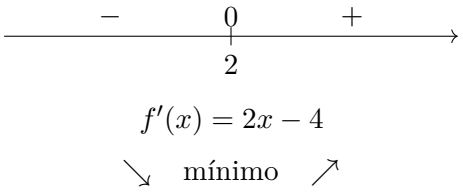
Crecimiento, decrecimiento y extremos

8.1 El signo de la derivada

En un intervalo donde una función es derivable, $f' > 0$ implica crecimiento y $f' < 0$ decrecimiento. Para polinomios, localizamos los ceros de f' y estudiamos su signo en los intervalos separados por ellos. Usamos una sola recta con todas las raíces y sustituimos un valor de prueba en la expresión original de la derivada; así conservamos su coeficiente principal, como acordamos en U4.

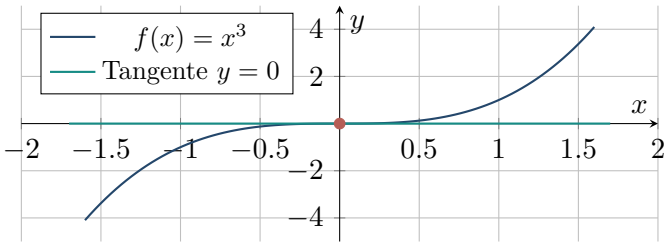
Ejemplo resuelto

$f(x) = x^2 - 4x$ tiene $f'(x) = 2x - 4$. Se anula en dos. Con $x = 0$, la derivada es negativa; con $x = 3$, positiva. f decrece antes de dos y crece después. Por tanto, en $(2, -4)$ hay un mínimo.



8.2 Máximos, mínimos y tangentes horizontales

Un cambio de signo de + a − indica máximo relativo; de − a +, mínimo relativo. La abscisa se obtiene con la derivada, pero la altura del extremo se calcula en f. En un punto interior derivable, un extremo obliga a derivada cero; el recíproco no es cierto.



Para $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$ se anula en cero, pero es positiva a ambos lados: no cambia el sentido de crecimiento y no hay extremo. En un intervalo cerrado, si se buscan extremos absolutos, se comparan también los valores en sus extremos.

8.3 Practica y razona

U11-22

Estudia crecimiento y extremos de $f(x) = -x^2 + 4x$. Usa una recta y sustituye en $f'(x)$ sin perder el signo inicial.

(Respuesta: Crece en $(-\infty, 2)$, decrece en $(2, +\infty)$; máximo en $(2, 4)$.)

U11-23

¿Es el origen un máximo o un mínimo de $f(x) = x^3$? Razona usando la derivada.

(Respuesta: No es ninguno, aunque su tangente sea horizontal.)

U11-24

Halla mínimo y máximo absolutos de $f(x) = x^2$ en $[-2, 3]$.

(Respuesta: Mínimo 0 en $x = 0$; máximo 9 en $x = 3$.)

Resumen del capítulo

Derivada cero da un candidato; el cambio de signo decide el extremo y la función original da su altura.

Capítulo 9

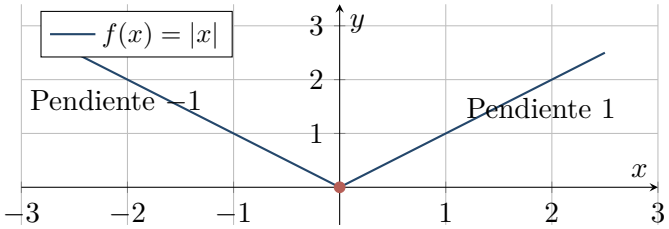
Continuidad y derivabilidad: una primera mirada

9.1 Una implicación en un punto

Si una función es derivable en un punto interior, entonces es continua en él. Una discontinuidad impide tener derivada en ese punto. Sin embargo, ser continua no basta: una curva puede no tener salto y presentar una esquina.

9.2 La esquina de valor absoluto

Para $f(x) = |x|$, en cero la función es continua. El cociente $[|h| - 0]/h$ vale uno para $h > 0$ y menos uno para $h < 0$. Como las pendientes de ambos lados no coinciden, no existe una única derivada finita en cero.



9.3 Reconocer sin generalizar en exceso

En una recta o un polinomio, los puntos interiores son derivables. En una gráfica con esquina hay que comparar las direcciones laterales. Una tangente horizontal puede existir perfectamente; no debe confundirse pendiente cero con derivada inexistente. La imagen orienta, mientras que el modelo permite justificar.

9.4 Practica y razona

U11-25

¿Es $f(x) = |x - 2|$ continua y derivable en $x = 2$?

(Respuesta: Continua sí; derivable no.)

U11-26

¿Puede una función discontinua en a ser derivable en ese mismo punto?

(Respuesta: No.)

U11-27

Compara x^2 y $|x|$ en el origen: valor, continuidad y derivada.

(Respuesta: Ambas valen cero y son continuas; la primera tiene derivada cero, la segunda no tiene derivada.)

Resumen del capítulo

Derivable implica continua; continua no implica derivable. Una esquina no se arregla asignándole pendiente cero.

Capítulo 10

Calculadora y herramientas digitales

10.1 Un cociente que cualquier modelo puede calcular

En las CASIO fx-991SP CW y fx-570SP X II del proyecto, usa la aplicación de cálculo ordinario para evaluar

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \qquad h \neq 0.$$

Escribe todos los paréntesis, calcula un cociente cada vez y repite con incrementos positivos y negativos. Este procedimiento no depende de disponer de un comando automático de derivación. Una salida decimal es una aproximación, no la expresión algebraica de $f'(x)$.

Ejemplo resuelto

Para $f(x) = x^2$ en dos, teclea $((2+0{,}1)^2 - 2^2)/0{,}1$: debe dar 4,1. Con incremento $-0{,}1$, usa $((2-0{,}1)^2 - 2^2)/(-0{,}1)$ y obtén 3,9.

10.2 Incrementos y redondeo

Empieza por 0,1 y 0,01. No supone una mejora automática elegir el incremento más pequeño posible: la resta de valores muy próximos y la precisión finita pueden amplificar el error de redondeo. La expresión simplificada $4 + h$ explica el límite mejor que una lista de ceros redondeados.

10.3 GeoGebra: observar y dejar evidencia

Representa una parábola, un punto A sobre ella y otro B con abscisa diferente. Construye la secante y compara su pendiente al acercar B; añade la tangente en A. Guarda una tabla de tres o más valores y una explicación de la tendencia. Comprueba un punto con cálculo exacto. No basta entregar una captura sin interpretación.

10.4 Practica y razona

U11-28

Para $f(x) = x^2$ en $a = 2$, compara las salidas 4,01 y 3,99 obtenidas con incrementos opuestos de módulo 0,01. ¿Qué sugieren?

(Respuesta: Derivada aproximada cuatro; el cálculo exacto confirma $f'(2) = 4$.)

U11-29

Un estudiante afirma que obtener 2,0000 en pantalla demuestra que el cociente es exactamente dos. ¿Es correcto?

(Respuesta: No; puede tratarse de una salida redondeada.)

U11-30

Diseña una tabla para comprobar la pendiente de x^2 en $a = 1$ usando $h = 0{,}1; 0{,}01; -0{,}01$.

(Respuesta: Cocientes $2{,}1; 2{,}01; 1{,}99$; tendencia dos.)

Resumen del capítulo

La herramienta comprueba y permite explorar; justificar el límite y leer unidades siguen siendo parte del trabajo.

Capítulo 11

Problemas integrados e interpretación

11.1 Posición y velocidad

Si $s(t)$ es posición, su derivada es velocidad. Para $s(t) = 2t^2 + 3t$ metros, $s'(t) = 4t + 3$ m/s y $s'(4) = 19$ m/s. La posición a los cuatro segundos es $s(4) = 44$ metros. Una derivada de posición no es una distancia recorrida.

11.2 Población y temperatura

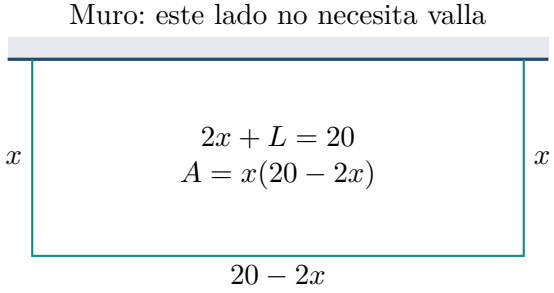
Un modelo polinómico puede describir un tramo temporal de un fenómeno. $P'(t)$ indica bacterias por hora; $T'(t)$, grados por unidad de tiempo. Hay que respetar el intervalo donde se plantea el modelo: no prolongarlo sin justificación ni interpretar una población negativa.

11.3 Un máximo con un modelo cuadrático

Con veinte metros de valla para tres lados de un rectángulo junto a un muro, sean x la anchura y $20 - 2x$ el largo. El dominio físico es $0 < x < 10$ y

$$A(x) = x(20 - 2x) = 20x - 2x^2, \qquad A'(x) = 20 - 4x.$$

La derivada se anula en cinco, es positiva antes y negativa después: área máxima $A(5) = 50$ m^2, con anchura cinco y largo diez. Hemos desarrollado el producto como polinomio antes de derivar.



11.4 Revisar errores y comunicar

En parejas, una persona construye el modelo y otra verifica dominio, derivada, signo y unidades; después intercambian roles. Cada una redacta individualmente qué error detectó y cómo lo corrigió. No basta resolver una ecuación: la respuesta debe contestar la pregunta del contexto.

11.5 Practica y razona

U11-31

Para $s(t) = 2t^2 + 3t$ metros, con $t \geq 0$ en segundos, calcula posición y velocidad a los cuatro segundos.
(Respuesta: 44 m y 19 m/s.)

U11-32

Un modelo $P(t) = 100 + 20t - t^2$, $0 \leq t \leq 8$ horas, describe bacterias. Calcula $P(4)$ y $P'(4)$ e interpreta.
(Respuesta: 164 bacterias y 12 bacterias/h.)

U11-33

Con veinticuatro metros de valla para tres lados junto a un muro, halla las dimensiones de mayor área. Desarrolla el polinomio antes de derivar.
(Respuesta: Anchura 6 m, largo 12 m; máximo 72 m^2.)

Resumen del capítulo

Conectar fórmula, dominio físico, signo y unidades: un candidato solo sirve si responde al problema y está permitido.

Apéndice A

Formulario y guía de consulta

A.1 Variaciones y pendientes

Variación absoluta: $\Delta f = f(b) - f(a)$. Tasa media, con $a < b$:

$$\mathrm{TVM}_{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Es la pendiente de una secante. Si f es posición en metros y la entrada es tiempo en segundos, la tasa se expresa en m/s.

A.2 Derivada en un punto y función derivada

En un punto interior a, cuando el límite existe y es finito,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Usar h no nulo durante la simplificación. La derivada es pendiente de tangente y tasa instantánea. $f(a)$ es el valor de la magnitud; $f'(a)$, su ritmo en ese instante. La función $f'(x)$ reúne las pendientes en los puntos donde existen.

A.3 Reglas elementales

$$(c)' = 0, \quad (x)' = 1, \quad (x^n)' = nx^{n-1} \quad (n \geq 1 \text{ natural}),$$
$$(cf)' = cf', \qquad (f \pm g)' = f' \pm g'.$$

En un polinomio, conservar signos y coeficientes. Obtener primero la función derivada y evaluar después si se pide un punto.

A.4 Tangente, signo y extremos

Tangente en $(a, f(a))$: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. Si la pendiente es cero, $y = f(a)$. En intervalos derivables, signo positivo implica crecimiento y negativo decrecimiento. Cambio de más a menos: máximo; de menos a más: mínimo. Una derivada cero no basta para asegurar extremo. Para extremos absolutos en un intervalo cerrado, comparar candidatos y fronteras.

A.5 Continuidad y uso de herramientas

Derivable en un punto implica continua allí; el recíproco es falso. $|x|$ es continua, pero tiene esquina en cero. Una calculadora aproxima cocientes: no demuestra un límite por mostrar un decimal. Contrastar con la expresión exacta y las pendientes por ambos lados.

Apéndice B

Práctica global

Resuelve con el método acordado, explica cada paso y comprueba tus resultados.

U11-G01

Halla variación y TVM de $f(x) = x^2 + 1$ entre 1 y 3. Interpreta la pendiente.

(Respuesta: 8 y 4; pendiente de la secante.)

U11-G02

Calcula por definición la derivada de $x^2 + 1$ en $x = 1$.

(Respuesta: 2.)

U11-G03

Deriva $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 7$ y calcula $f'(2)$.

(Respuesta: $6x^2 - 10x + 4$; 8.)

U11-G04

Halla la tangente a $f(x) = x^2 + 1$ en $x = 2$.

(Respuesta: $y = 4x - 3$.)

U11-G05

Estudia monotonía y extremo de $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

(Respuesta: Decrece antes de dos, crece después; mínimo $(2, -3)$.)

U11-G06

Compara continuidad y derivabilidad de x^2, x^3 y $|x|$ en cero.

(Respuesta: Todas continuas; las dos primeras tienen derivada cero y la última no es derivable.)

U11-G07

Para $s(t) = t^2 - 4t$ metros, compara la velocidad media entre uno y tres segundos con la velocidad en tres.

(Respuesta: 0 m/s y 2 m/s.)

U11-G08

Entre los rectángulos de perímetro cuarenta metros, halla el de mayor área.

(Respuesta: Cuadrado de lado diez metros y área cien metros cuadrados.)

Apéndice C

Autoevaluación de 20 preguntas

Una sola respuesta correcta. Anota tus elecciones y justifica las que te hayan generado dudas. La clave está exclusivamente en el documento docente.

Pregunta 1

La variación de 18 a 24 es:

A) 6

B) 3

C) 42

D) 24

Pregunta 2

La TVM de x^2 entre uno y tres es:

A) 8

B) 4

C) 2

D) 9

Pregunta 3

La pendiente de una secante representa:

A) Siempre velocidad instantánea

B) La altura de f

C) Una tasa media

D) Un área

Pregunta 4

Para calcular el cociente de incrementos h debe ser:

A) Cero

B) Positivo siempre

C) Uno siempre

D) Distinto de cero

Pregunta 5

Para x^2 en uno, el cociente simplificado es:

A) $2 + h$

B) h

C) $1 + h$

D) $2h$

Pregunta 6

La derivada en un punto representa:

A) El valor de la función

B) La pendiente de la tangente

C) Siempre un máximo

D) La pendiente de un eje

Pregunta 7

Si s está en metros y t en segundos, la unidad de la derivada es:

A) m

B) s

C) m/s

D) m^2

Pregunta 8

La derivada de una constante cinco es:

A) 5

B) 1

C) x

D) 0

Pregunta 9

La derivada de x^3 es:

A) $3x^2$

B) $3x$

C) x^2

D) x^3

Pregunta 10

La derivada de $3x^2 - 5$ es:

A) $2x - 5$

B) $6x$

C) $6x - 5$

D) $3x$

Pregunta 11

Si $f(x) = x^2$, entonces $f'(3)$ es:

A) 9

B) 3

C) 6

D) 2

Pregunta 12

La tangente a x^2 en uno es:

A) $y = x$

B) $y = 2x$

C) $y = x - 1$

D) $y = 2x - 1$

Pregunta 13

Si $f' > 0$ en un intervalo, f es:

A) Creciente

B) Decreciente

C) Constante

D) Positiva necesariamente

Pregunta 14

Un cambio de signo de la derivada de menos a más indica:

A) Máximo

B) Mínimo

C) Discontinuidad siempre

D) Ningún cambio

Pregunta 15

Que $f'(a) = 0$:

A) Garantiza máximo

B) Garantiza mínimo

C) No garantiza extremo

D) Impide tangente

Pregunta 16

Si una función es derivable en un punto:

A) Es discontinua allí

B) Tiene un máximo allí

C) Tiene derivada positiva

D) Es continua allí

Pregunta 17

El valor absoluto en el origen es:

A) Continuo y no derivable

B) Derivable y discontinuo

C) Derivable de derivada cero

D) Discontinuo

Pregunta 18

Un resultado decimal de calculadora:

A) Siempre es exacto

B) Puede estar redondeado

C) Demuestra que existe un límite

D) Es la función derivada siempre

Pregunta 19

En $A(x) = 20x - 2x^2$, $0 < x < 10$, el área máxima es:

A) 25

B) 100

C) 50

D) 20

Pregunta 20

Una TVM cero significa:

A) Que no hubo movimiento nunca

B) Que la rapidez fue siempre cero

C) Que la derivada no existe

D) Que los valores inicial y final coinciden

Revisión personal

Selecciona dos respuestas y explica el procedimiento. Anota un error detectado y una acción concreta para mejorar. No cambies la respuesta sin explicar qué has revisado.