MATEMÁTICAS B

4.º de Educación Secundaria Obligatoria

Unidad 8

Límites y continuidad

Manual del alumnado

Curso 2026–2027

Edición V01 · Índice cerrado el 30 de octubre de 2026

Índice

1 Idea intuitiva de límite en un punto **3**
1.1 Acercarse sin evaluar necesariamente en el punto . . . 3
1.2 Tablas y gráficas . . . 3
1.3 Practica y razona . . . 3

2 Límites laterales **5**
2.1 Dos direcciones de aproximación . . . 5
2.2 Elegir la rama cercana . . . 5
2.3 Dominios con extremos . . . 5
2.4 Practica y razona . . . 5

3 Límites infinitos en un punto **7**
3.1 Crecer o decrecer sin cota . . . 7
3.2 Signos y asíntotas verticales . . . 7
3.3 Practica y razona . . . 7

4 Límites en el infinito **9**
4.1 Alejarse hacia cada extremo . . . 9
4.2 Asíntotas horizontales . . . 9
4.3 Saturación e interpretación . . . 9
4.4 Practica y razona . . . 9

5 Propiedades y cálculo directo **11**
5.1 Reglas con límites finitos . . . 11
5.2 Sustituir y diagnosticar . . . 11
5.3 El infinito no es un número real . . . 11
5.4 Practica y razona . . . 11

6 Indeterminación cero entre cero **13**
6.1 Factorizar y simplificar . . . 13
6.2 Raíces: usar el conjugado . . . 13
6.3 Comprobar la transformación . . . 13
6.4 Practica y razona . . . 13

7 Indeterminaciones en el infinito **15**
7.1 Cocientes de polinomios . . . 15
7.2 Diferencias que exigen transformación . . . 15
7.3 Reconocer otras formas . . . 15
7.4 Practica y razona . . . 15

8 Continuidad **17**
8.1 Tres condiciones en un punto . . . 17
8.2 Discontinuidades . . . 17
8.3 Funciones a trozos y parámetros . . . 17
8.4 Practica y razona . . . 17

9 Calculadora y GeoGebra **19**
9.1 Tablas de aproximación . . . 19
9.2 Redondeo y ventana . . . 19
9.3 Exploración en GeoGebra . . . 19
9.4 Practica y razona . . . 19

10 Problemas integrados y síntesis **20**
10.1 Elegir y explicar el procedimiento . . . 20
10.2 Modelos y sus límites de validez . . . 20
10.3 Comunicación y revisión . . . 20
10.4 Practica y razona . . . 20

A Formulario y mapa de límites **21**
A.1 Punto, laterales e infinito . . . 21
A.2 Elegir el procedimiento . . . 21
A.3 Continuidad . . . 21

B Práctica global **22**

C Autoevaluación de 20 preguntas **23**

Capítulo 1

Idea intuitiva de límite en un punto

1.1 Acercarse sin evaluar necesariamente en el punto

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ significa que las salidas se aproximan a L cuando las entradas se aproximan a a, considerando entradas próximas distintas de a en el dominio. El límite describe una tendencia, no la sustitución aislada $f(a)$. En esta unidad se trabaja intuitivamente, sin definición formal con ε y δ.

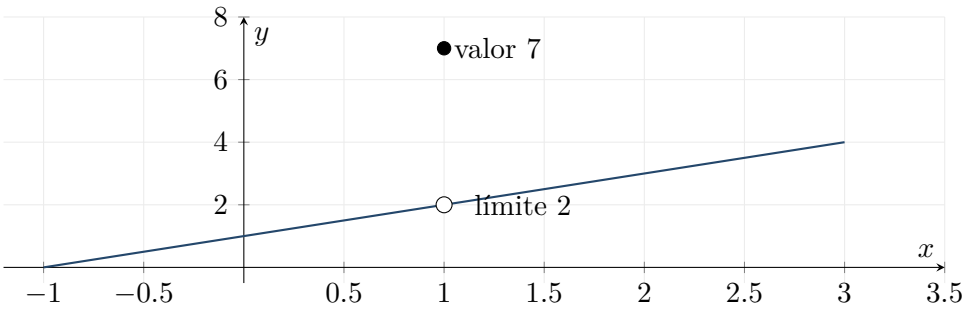
1.2 Tablas y gráficas

Para explorar, usa entradas próximas por ambos lados. Un conjunto finito de datos orienta, pero no demuestra el límite por sí solo. En una gráfica observa la altura hacia la que se acercan las ramas, aunque en la abscisa exacta haya hueco o un punto lleno a otra altura.

Ejemplo resuelto

$f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ para $x \neq 1$. Como coincide con $x + 1$ cerca de 1, el límite es 2 aunque $f(1)$ no exista. Si se define un valor $f(1) = 7$, el límite sigue siendo 2. Cambiar un único valor no cambia la tendencia próxima.

x	0,9	0,99	1,01	1,1
$f(x)$	1,9	1,99	2,01	2,1



1.3 Practica y razona

U08-01

Calcula $\lim_{x\to 2}(2x + 1)$ e imagen en 2.
(Respuesta: Ambos valen 5.)

U08-02

Sea $f(x) = x + 1$ si $x \neq 1$ y $f(1) = 7$. Halla límite en 1 y valor en ese punto.
(Respuesta: Límite 2; valor 7.)

U08-03

Justifica el límite en 1 de $(x^2 - 1)/(x - 1)$ e indica si existe la imagen.
(Respuesta: Límite 2; imagen no definida.)

Resumen del capítulo

Límite y valor en el punto son datos distintos; combinar la exploración numérica con una justificación.

Capítulo 2

Límites laterales

2.1 Dos direcciones de aproximación

$\lim_{x\to a^-} f(x)$ estudia entradas menores que a; $\lim_{x\to a^+} f(x)$, mayores. El límite bilateral finito existe si ambos laterales existen y coinciden en el mismo número. Si son distintos, no hay un único límite bilateral.

2.2 Elegir la rama cercana

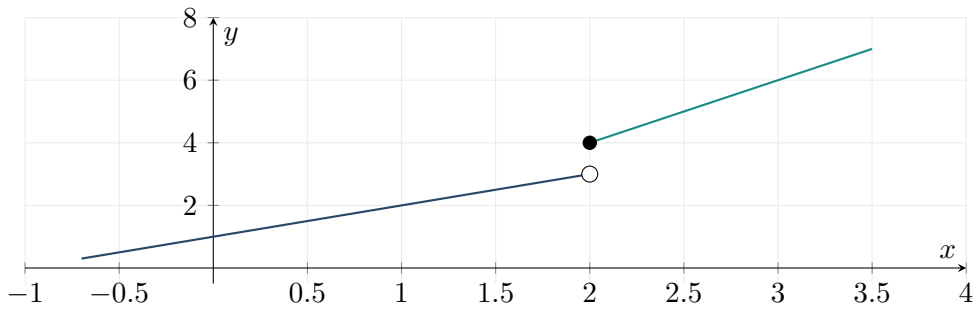
En una función a trozos, el signo $\leq$ o $\geq$ en el punto decide el valor exacto, pero la rama que actúa en un intervalo lateral decide el límite de ese lado.

Ejemplo resuelto

$f(x) = x + 1$ para $x < 2$ y $f(x) = 2x$ para $x \geq 2$. En 2, límite izquierdo 3, derecho 4, valor 4. No existe el límite bilateral. No se promedian los dos límites.

2.3 Dominios con extremos

En el extremo de un intervalo puede haber una sola dirección de aproximación dentro del dominio. Para la continuidad en intervalos cerrados se utilizará ese límite lateral; no se inventa una rama exterior donde la función no existe.



2.4 Practica y razona

U08-04

Para $f(x) = x + 1$ si $x < 2$ y $2x$ si $x \geq 2$, calcula ambos laterales, el bilateral y $f(2)$.
(Respuesta: 3, 4, bilateral no existe; $f(2) = 4$.)

U08-05

Sea $g(x) = x^2$ para $x < 1$ y $2x - 1$ para $x \geq 1$. Calcula límites y valor en 1.
(Respuesta: Laterales y bilateral 1; $g(1) = 1$.)

U08-06

Explica el límite por la derecha de $\sqrt{x}$ en 0 y por qué no se usa una tabla de entradas negativas reales.
(Respuesta: 0; las entradas negativas no pertenecen al dominio real.)

Resumen del capítulo

En funciones a trozos, seleccionar la fórmula que corresponde a cada lado y comparar después las tendencias.

Capítulo 3

Límites infinitos en un punto

3.1 Crecer o decrecer sin cota

$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ expresa que las salidas superan cualquier cota positiva al acercarse suficientemente; $-\infty$ expresa que bajan de cualquier cota negativa. No significa que $f(a)$ sea un número infinito. Cuando los dos lados tienden al mismo infinito se usa esa notación bilateral extendida; no es un límite real finito.

3.2 Signos y asíntotas verticales

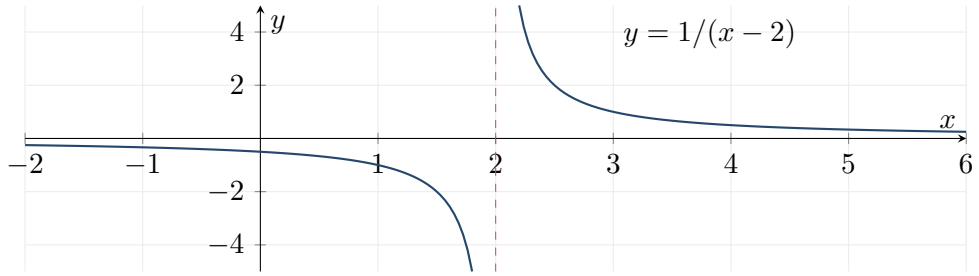
Una recta $x = a$ es asíntota vertical si al menos uno de los límites laterales es infinito. Con $1/(x-2)$, por la izquierda el denominador es negativo y próximo a cero: tendencia $-\infty$; por la derecha es positivo: $+\infty$. No hay límite bilateral común, pero sí asíntota vertical.

Ejemplo resuelto

Para $1/(x-2)^2$, el denominador es positivo a ambos lados y se aproxima a cero: ambos límites son $+\infty$. Para $-1/(x-2)^2$ son $-\infty$.

Atención

Un cero del denominador no garantiza una asíntota: puede haber un factor común y un hueco. Simplifica con las restricciones originales y estudia la tendencia.



3.3 Practica y razona

U08-07

Halla los límites laterales de $1/(x-3)$ en 3 y su asíntota.
(Respuesta: Izquierdo $-\infty$; derecho $+\infty$; $x = 3$.)

U08-08

Calcula $\lim_{x\to 1}(-2/(x-1)^2)$.
(Respuesta: $-\infty$.)

U08-09

Compara en 2 las tendencias de $(x^2-4)/(x-2)$ y de $1/(x-2)$.
(Respuesta: Primera límite 4, hueco; segunda laterales $-\infty, +\infty$, asíntota.)

Resumen del capítulo

Un límite infinito describe una tendencia; el signo se decide a cada lado y una asíntota puede existir aunque los lados discrepen.

Capítulo 4

Límites en el infinito

4.1 Alejarse hacia cada extremo

En $x \to +\infty$, la entrada crece sin cota; en $x \to -\infty$, decrece sin cota. Estos límites no describen una entrada próxima a un número fijo. Se estudian por separado porque pueden diferir.

Ejemplo resuelto

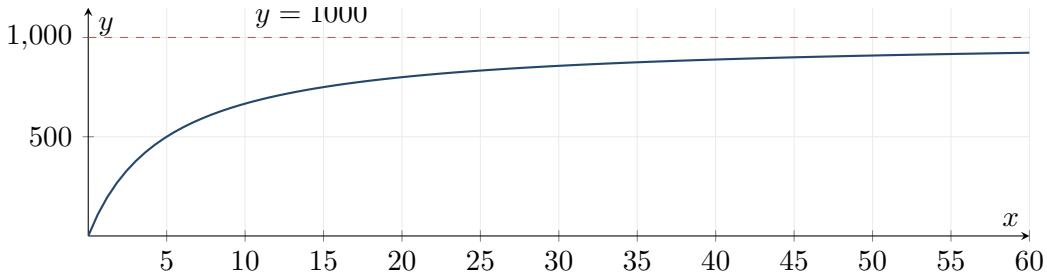
$1/x \to 0$ en ambos extremos; $x^2 \to +\infty$ en ambos; $x^3 \to +\infty$ hacia la derecha y $-\infty$ hacia la izquierda. En $(1/2)^x$, el límite es cero hacia la derecha y $+\infty$ hacia la izquierda.

4.2 Asíntotas horizontales

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, con L finito, $y = L$ es asíntota horizontal en ese extremo. No tiene por qué ser una cota y la gráfica puede cruzarla: por ejemplo $x/(x^2+1)$ tiende a cero y pasa por $(0, 0)$.

4.3 Saturación e interpretación

$P(t) = 1000t/(t+5)$, $t \geq 0$, tiende a 1000 cuando t crece. Su distancia a 1000 es $5000/(t+5) > 0$, por lo que no alcanza ese valor para un tiempo finito del dominio. Esta última afirmación se justifica con la expresión; no se deduce solo de tener asíntota.



4.4 Practica y razona

U08-10

Halla límites de $1/x$, x^2 y x^3 en ambos infinitos.
(Respuesta: $1/x$: cero en ambos; x^2: $+\infty$ en ambos; x^3: $+\infty$ a la derecha y $-\infty$ a la izquierda.)

U08-11

Determina límites en ambos infinitos de $2 + 3/(x - 1)$.
(Respuesta: 2 en ambos; asíntota $y = 2$.)

U08-12

Para $P(t) = 1000t/(t + 5)$, $t \geq 0$, calcula $P(5)$, límite y si alcanza 1000.
(Respuesta: 500; límite 1000; no lo alcanza en tiempo finito.)

Resumen del capítulo

Separar la dirección de la entrada y la de la salida; un límite finito en el infinito determina una asíntota horizontal.

Capítulo 5

Propiedades y cálculo directo

5.1 Reglas con límites finitos

Si $f \to L$ y $g \to M$ finitos, entonces $f+g \to L+M$, $f-g \to L-M$ y $fg \to LM$. En el cociente se requiere $M \neq 0$; entonces $f/g \to L/M$. Para potencias y raíces se aplican las propiedades de las expresiones continuas en su dominio, con cuidado en los extremos de raíces pares.

Ejemplo resuelto

$\lim_{x\to 2}(x^2+3x-1) = 4+6-1 = 9$; $\lim_{x\to 1}(x+2)/(x+3) = 3/4$. En $\sqrt{x+1}$ al acercarse a 3, el límite es 2.

5.2 Sustituir y diagnosticar

Los polinomios son continuos; las racionales lo son donde el denominador no se anula. Las exponenciales, logaritmos y trigonométricas se sustituyen en puntos de continuidad de sus dominios. Si la sustitución produce $0/0$, la regla de cociente no da resultado: hay que transformar y estudiar. Un cociente con numerador no nulo y denominador que tiende a cero requiere estudiar signos laterales. No se escribe automáticamente un mismo infinito para ambos lados.

5.3 El infinito no es un número real

Las reglas de tendencias con infinito tienen condiciones; expresiones como $\infty - \infty$ o ∞/∞ no se calculan restando o cancelando símbolos. Diferentes funciones con esas mismas formas pueden producir límites distintos.

5.4 Practica y razona

U08-13

Calcula los límites en 2 de x^2+3x-1 y en 1 de $(x+2)/(x+3)$.
(Respuesta: 9 y 3/4.)

U08-14

Calcula $\lim_{x\to 3}\sqrt{x+1}$ y $\lim_{x\to 0} 2^x$.
(Respuesta: 2 y 1.)

U08-15

Si $f \to 2$ y $g \to -3$, halla límites de $f+g$, fg y f/g.
(Respuesta: -1, -6, $-2/3$.)

Resumen del capítulo

Primero sustituir donde sea válido; después distinguir resultado determinado, estudio lateral o indeterminación.

Capítulo 6

Indeterminación cero entre cero

6.1 Factorizar y simplificar

0/0 no es un resultado ni implica que no exista el límite. En un cociente de polinomios, factoriza numerador y denominador y cancela factores comunes para entradas próximas pero distintas del punto problemático.

Ejemplo resuelto

$\lim_{x\to 2}(x^2-4)/(x-2) = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$. La igualdad de expresiones vale para $x \neq 2$ y basta para estudiar la tendencia. La original sigue sin estar definida en 2.

Si el factor no se ve por identidades, Ruffini ayuda. Para x^3-3x^2+2, dividir entre $x-1$ da x^2-2x-2 con resto cero: por tanto el límite del cociente en 1 es -3.

6.2 Raíces: usar el conjugado

Ejemplo resuelto

$$\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}, \quad x \neq 1.$$

Al acercarse a 1, el límite es 1/4. El conjugado no es una fórmula para cualquier raíz: se elige para transformar una diferencia de cuadrados.

6.3 Comprobar la transformación

Mantén las restricciones del dominio original y comprueba que los factores cancelados son no nulos en el entorno perforado utilizado. No se puede separar una diferencia de raíces como raíz de la diferencia.

6.4 Practica y razona

U08-16

Calcula $\lim_{x\to 3}(x^2-9)/(x-3)$.
(Respuesta: 6.)

U08-17

Calcula $\lim_{x\to 1}(x^3-3x^2+2)/(x-1)$ mediante Ruffini.
(Respuesta: -3.)

U08-18

Calcula $\lim_{x\to 1}(\sqrt{x+3}-2)/(x-1)$.
(Respuesta: $1/4$.)

U08-19

Calcula $\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-1)/x$ e indica si la expresión original está definida en cero.
(Respuesta: $1/2$; no.)

Resumen del capítulo

Cero entre cero obliga a transformar; cancelar sirve para el límite, no para redefinir automáticamente la función original.

Capítulo 7

Indeterminaciones en el infinito

7.1 Cocientes de polinomios

Para $x \to \pm\infty$, divide numerador y denominador por la mayor potencia de x que aparezca. Los términos $1/x^m$, $m > 0$, tienden a cero. Si los grados son iguales, el límite es el cociente de coeficientes principales. Si el numerador tiene menor grado, es cero. Si tiene mayor grado, estudia el término dominante y su signo en cada extremo: no basta escribir infinito sin signo.

Ejemplo resuelto

$\frac{3x^2-x+1}{2x^2+5} = \frac{3-1/x+1/x^2}{2+5/x^2} \to 3/2$. En $(-2x^3+x)/(x^2+1)$ domina $-2x$: límite $-\infty$ a la derecha y $+\infty$ a la izquierda.

7.2 Diferencias que exigen transformación

En $x/(x-1)-1$, reducir a un cociente da $1/(x-1)$, cuyo límite es cero. La sustitución de tendencias en otras diferencias puede producir $\infty - \infty$ y no determina el resultado.

Ejemplo resuelto

Para $x \to +\infty$,

$$\sqrt{x^2+3x} - x = \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \frac{3}{\sqrt{1+3/x}+1} \to \frac{3}{2}.$$

Aquí $\sqrt{x^2} = |x| = x$ porque estamos hacia $+\infty$. Hacia $-\infty$ no se puede usar esa igualdad sin cambiar el signo.

7.3 Reconocer otras formas

$0 \cdot \infty$, 1^∞, 0^0 e ∞^0 también son formas indeterminadas en el contexto de límites. Se nombran para reconocer que no basta operar símbolos; sus técnicas específicas quedan fuera de esta unidad. Tampoco se usa L'Hôpital.

7.4 Practica y razona

U08-20

Calcula en ambos infinitos $(3x^2 - x + 1)/(2x^2 + 5)$.
(Respuesta: 3/2 en ambos.)

U08-21

Halla límites de $(2x+1)/(x^2+3)$ en ambos infinitos.
(Respuesta: 0 en ambos.)

U08-22

Calcula en ambos infinitos $(-2x^3+x)/(x^2+1)$.
(Respuesta: $-\infty$ a la derecha y $+\infty$ a la izquierda.)

U08-23

Calcula $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$.
(Respuesta: 3/2.)

U08-24

Calcula $\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)/(x+1)-x$.
(Respuesta: -1.)

Resumen del capítulo

En racionales comparar términos dominantes; en diferencias transformar; hacia menos infinito conservar la paridad y el valor absoluto.

Capítulo 8

Continuidad

8.1 Tres condiciones en un punto

Una función es continua en un punto interior a si $f(a)$ existe, el límite en a existe y es finito, y coincide con $f(a)$. No basta verificar solo una o dos condiciones. En un intervalo abierto se exige continuidad en cada punto; en $[a, b]$, además, continuidad por la derecha en a y por la izquierda en b. Las funciones elementales son continuas en sus dominios, con el sentido lateral adecuado en extremos de raíces pares. En racionales, examina aparte los puntos excluidos de la expresión original.

8.2 Discontinuidades

Evitable: el límite finito existe, pero falta el valor o no coincide; se repara definiendo ese valor igual al límite. De salto finito: laterales finitos distintos. Infinita: al menos un lateral infinito. No se afirma que estos tipos agoten todas las posibilidades, pero son los que se trabajan aquí.

8.3 Funciones a trozos y parámetros

Calcula límite izquierdo, derecho y valor en cada unión. Para continuidad con un parámetro, impón coincidencia y comprueba después los tres datos.

Ejemplo resuelto

$f(x) = 2x + k$ para $x < 1$ y $x^2 + 4$ para $x \geq 1$. En uno, las tendencias son $2 + k$ y 5, y el valor es 5. Se requiere $k = 3$. Con ese parámetro, la función es continua también fuera de la unión por ser polinómica en cada tramo.

8.4 Practica y razona

U08-25

Clasifica en 1 la función $x + 1$ para $x \neq 1$ y valor 7 en 1. ¿Cómo se repara?
(Respuesta: Evitable; asignar $f(1) = 2$.)

U08-26

Clasifica en 0 la función 1 para $x < 0$ y 2 para $x \geq 0$.
(Respuesta: Salto finito de tamaño 1.)

U08-27

Halla k para continuidad de $2x + k$ si $x < 1$ y $x^2 + 4$ si $x \geq 1$.
(Respuesta: $k = 3$.)

U08-28

Halla b para continuidad de bx si $x < 2$ y $x + 4$ si $x \geq 2$.
(Respuesta: $b = 3$.)

U08-29

Estudia continuidad de $\sqrt{x}$ en $[0, 4]$ y de $1/x$ en $[-1, 1]$.
(Respuesta: La raíz es continua en $[0, 4]$; el inverso no es continuo en todo $[-1, 1]$.)

Resumen del capítulo

Continuidad exige valor definido, límite finito y coincidencia; en uniones revisar los dos lados y la rama que incluye el punto.

Capítulo 9

Calculadora y GeoGebra

9.1 Tablas de aproximación

En Tabla de fx-991SP CW (HOME) o fx-570SP X II (MENU), introduce la función y elige entradas válidas próximas al punto por separado a izquierda y derecha. Para $(x^2-1)/(x-1)$ en uno, utiliza 0,9, 0,99, 1,01, 1,1, mediante evaluación individual o tablas pequeñas con pasos adecuados. No introduzcas $x=1$ como si la función tuviera que dar su límite. Para infinito, compara entradas crecientes como $10, 100, 1000$; para el otro extremo usa negativas de módulos crecientes. No confundas un número grande con infinito ni pruebes un límite con tres resultados.

9.2 Redondeo y ventana

La diferencia $\sqrt{1+x}-1$ puede perder precisión si x es muy pequeño; la forma racionalizada permite contrastar. Un valor mostrado como cero puede ser fruto del redondeo. Una ventana gráfica puede ocultar un hueco o unir visualmente dos ramas; usa puntos abiertos y expresiones originales para interpretarla.

9.3 Exploración en GeoGebra

Representa la recta $y=x+1$, señala un hueco en $(1,2)$ y un punto lleno en $(1,7)$ para modelizar la función del primer capítulo. Compara la altura de las ramas cercanas con el valor aislado. Después representa una función con salto y otra con asíntota vertical, registra laterales y explica las diferencias sin basarte solo en la apariencia.

9.4 Practica y razona

U08-30

Calcula $(x^2-1)/(x-1)$ para $x=0{,}99$ y $1{,}01$. ¿Es el límite exactamente uno de esos valores?
(Respuesta: 1,99 y 2,01; el límite es 2.)

U08-31

Una pantalla no muestra el hueco de $(x^2-1)/(x-1)$ en uno. ¿Puede concluirse que la función es continua allí?
(Respuesta: No.)

Resumen del capítulo

La aproximación numérica y la gráfica aportan evidencias, pero no reemplazan dominios, signos ni transformaciones exactas.

Capítulo 10

Problemas integrados y síntesis

10.1 Elegir y explicar el procedimiento

Identifica si la entrada se acerca a un número o se aleja a un infinito. En un punto, sustituye si hay continuidad, compara laterales si cambia la fórmula, transforma $0/0$ y estudia signos si aparece un denominador próximo a cero con numerador no nulo. En infinito, usa términos dominantes o conjugado según la expresión. Después interpreta el resultado.

10.2 Modelos y sus límites de validez

Un crecimiento exponencial con factor mayor que uno tiende a $+\infty$; un modelo de saturación puede acercarse a un valor finito. Esto no certifica que uno describa para siempre una población real: se comparan con datos y recursos disponibles. Las cifras de los ejercicios son supuestos didácticos, no datos observados.

Ejemplo resuelto

Una tarifa $C(t) = 2t$ para $0 \leq t < 2$ y $4 + 1{,}5(t-2)$ para $t \geq 2$ es continua en dos: laterales y valor cuatro. Si la segunda rama fuera $5 + 1{,}5(t-2)$, aparecería un salto de un euro. El contexto decide si ese recargo tiene sentido.

10.3 Comunicación y revisión

En parejas, intercambiad una tabla de tendencias y detectad qué conclusión necesita todavía justificación. Cada integrante entrega una corrección individual con expresión original, transformación válida y explicación del resultado. No se incluyen sucesiones en esta unidad.

10.4 Practica y razona

U08-32

Una tarifa vale $2t$ si $0 \leq t < 2$ y $5 + 1{,}5(t-2)$ si $t \geq 2$. Halla laterales y valor en 2 e interpreta.
(Respuesta: 4, 5 y 5 euros; salto de 1 euro.)

U08-33

Compara a largo plazo $N(t) = 200 \cdot 2^t$ y $P(t) = 1000t/(t+5)$ para $t \geq 0$.
(Respuesta: La primera tiende a $+\infty$ y la segunda a 1000.)

Resumen del capítulo

La solución completa distingue tendencia, valor y contexto, y explica por qué la operación realizada es válida.

Formulario y mapa de límites

A.1 Punto, laterales e infinito

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ describe la tendencia cerca de a, no necesariamente $f(a)$. El límite bilateral finito exige que ambos laterales existan y sean iguales a L. En extremos del dominio se usa la aproximación lateral pertinente.

$\lim_{x\to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$: tendencia sin cota, no valor real de la función. Si al menos un lateral es infinito, $x = a$ es asíntota vertical. Para asíntota horizontal $y = L$, basta un límite finito L cuando $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$; la gráfica puede cruzarla.

A.2 Elegir el procedimiento

Situación	Actuación
Punto de continuidad	Sustituir; comprobar existencia de la expresión.
Función a trozos	Usar la rama de cada lado; separar límites y valor exacto.
$0/0$ con polinomios	Factorizar, usar identidades o Ruffini; cancelar para $x \neq a$ y calcular el límite de la expresión equivalente próxima.
$0/0$ con raíces	Conjugado cuando forme diferencia de cuadrados; conservar dominio.
Numerador no nulo y denominador hacia cero	Estudiar signos a cada lado; no asignar automáticamente un infinito común.
∞/∞ racional	Dividir por la mayor potencia de x. Menor grado arriba: cero; igual grado: cociente principal; mayor grado arriba: estudiar signo y dirección.
$\infty - \infty$	Reducir a cociente o usar conjugado. No restar símbolos de infinito.

Si los límites de f, g son L, M finitos: suma $L + M$, diferencia $L - M$, producto LM; cociente L/M solo si $M \neq 0$.

Hacia menos infinito, $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ para entradas negativas. Las potencias pares e impares tienen distinto comportamiento de signo. Otras formas indeterminadas se reconocen, pero no se desarrollan técnicas avanzadas ni L'Hôpital.

A.3 Continuidad

En un punto interior: (1) existe $f(a)$; (2) existe límite finito; (3) coincide con $f(a)$. En $[a, b]$, revisar continuidad por la derecha en a y por la izquierda en b.

Evitable: límite finito y valor ausente o distinto. Salto finito: laterales finitos distintos. Infinita: algún lateral infinito. Con un parámetro, igualar laterales y verificar también el valor de la rama que incluye el punto.

Resumen del capítulo

Identificar aproximación → diagnosticar forma → transformar válidamente → comprobar signos y dominio → interpretar tendencia y valor sin confundirlos.

Apéndice B

Práctica global

Resuelve con el método acordado, explica cada paso y comprueba tus resultados.

U08-G01

Calcula $\lim_{x\to 2}(x^2-4)/(x-2)$ y explica el valor que habría que asignar en dos para continuidad.
(Respuesta: 4; asignar $f(2)=4$.)

U08-G02

Calcula $\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}-2)/(x-4)$.
(Respuesta: 1/4.)

U08-G03

Calcula los límites laterales de $-3/(x+1)$ en -1.
(Respuesta: Izquierdo $+\infty$; derecho $-\infty$.)

U08-G04

Halla límites en ambos infinitos de $(4x^2+1)/(2x^2-3)$.
(Respuesta: 2 en ambos.)

U08-G05

Calcula $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$.
(Respuesta: 2.)

U08-G06

Halla k para continuidad en 2 de $x+k$ si $x<2$ y x^2 si $x\geq 2$.
(Respuesta: $k=2$.)

U08-G07

Una función vale x^2 si $x<1$ y $x+2$ si $x\geq 1$. Estudia continuidad en uno.
(Respuesta: Salto: laterales 1 y 3, valor 3.)

U08-G08

Un coste medio por kilogramo es $C(x)=12+600/x$ euros/kg, para una producción de $x>0$ kg. Interpreta el valor al crecer mucho x y si se alcanza.
(Respuesta: Se aproxima a 12 desde arriba sin alcanzarlo para una producción finita.)

Apéndice C

Autoevaluación de 20 preguntas

Una sola respuesta correcta. Anota tus elecciones y justifica las que te hayan generado dudas. La clave está exclusivamente en el documento docente.

Pregunta 1

El límite en un punto depende principalmente de:

A) Solo el valor en el punto

B) La tendencia próxima

C) Solo el eje vertical

D) El nombre de la función

Pregunta 2

Si los laterales son 2 y 3, el límite bilateral:

A) No existe

B) Es 2.5

C) Es 5

D) Es 3

Pregunta 3

Si $f(1) = 7$ pero cerca de uno $f(x) = x + 1$, el límite es:

A) 7

B) 1

C) 2

D) No existe necesariamente

Pregunta 4

$\lim_{x \to 0^+} 1/x$ es:

A) 0

B) 1

C) $-\infty$

D) $+\infty$

Pregunta 5

$\lim_{x\to 0^-} 1/x$ es:

A) $-\infty$

B) $+\infty$

C) 0

D) -1

Pregunta 6

$\lim_{x\to 1} -2/(x-1)^2$ es:

A) $+\infty$

B) $-\infty$

C) 0

D) -2

Pregunta 7

$\lim_{x\to +\infty} 1/x$ es:

A) 1

B) Infinito positivo

C) 0

D) No existe

Pregunta 8

$\lim_{x\to -\infty} x^3$ es:

A) $+\infty$

B) 0

C) 1

D) $-\infty$

Pregunta 9

Si el límite en $+\infty$ es 4, hay asíntota:

A) $y = 4$

B) $x = 4$

C) $y = 0$ necesariamente

D) Ninguna

Pregunta 10

$\lim_{x\to 2}(x^2 + 1)$ vale:

A) 3

B) 5

C) 4

D) 0

Pregunta 11

La forma 0/0 significa:

A) Resultado cero

B) Resultado uno

C) Hace falta estudiar o transformar

D) Siempre no existe límite

Pregunta 12

$\lim_{x\to 3}(x^2 - 9)/(x - 3)$ es:

A) 0

B) 3

C) 9

D) 6

Pregunta 13

$\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-1)/x$ vale:

A) 1/2

B) 0

C) 1

D) 2

Pregunta 14

$\lim_{x\to +\infty}(3x^2+1)/(2x^2+5)$ es:

A) 0

B) 3/2

C) 2/3

D) $+\infty$

Pregunta 15

$\lim_{x\to +\infty}(2x+1)/(x^2+3)$ es:

A) 2

B) 1

C) 0

D) $+\infty$

Pregunta 16

$\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$ vale:

A) 0

B) 4

C) Infinito

D) 2

Pregunta 17

Continuidad en un punto interior exige:

A) Valor, límite finito y coincidencia

B) Solo valor definido

C) Solo laterales distintos

D) Solo una tabla

Pregunta 18

Límite finito existente y valor distinto produce:

A) Salto finito

B) Discontinuidad evitable

C) Continuidad

D) Asíntota vertical siempre

Pregunta 19

Para $2x + k$ a la izquierda de 1 y $x^2 + 4$ en $x \geq 1$, continuidad exige:

A) k=2

B) k=5

C) k=3

D) k=1

Pregunta 20

Una asíntota horizontal:

A) Nunca puede cruzarse

B) Siempre es cota superior

C) Implica discontinuidad en todo punto

D) Puede cruzarse

Revisión personal

Selecciona dos respuestas y explica el procedimiento. Anota un error detectado y una acción concreta para mejorar. No cambies la respuesta sin explicar qué has revisado.