MATEMÁTICAS B

4.º de Educación Secundaria Obligatoria

Unidad 7

Funciones y funciones elementales

Manual del alumnado

Curso 2026–2027

Edición V01 · Índice cerrado el 30 de octubre de 2026

Índice

1 Concepto de función. Dominio y recorrido **3**
1.1 Una entrada, una salida . . . 3
1.2 Imágenes, antecedentes y restricciones . . . 3
1.3 Practica y razona . . . 4

2 Operaciones con funciones **5**
2.1 Operaciones y sus dominios . . . 5
2.2 Componer en el orden correcto . . . 5
2.3 La función inversa . . . 5
2.4 Practica y razona . . . 5

3 Propiedades de las funciones **7**
3.1 Leer una gráfica . . . 7
3.2 Simetría, periodicidad y continuidad intuitiva . . . 7
3.3 Tasa de variación media . . . 7
3.4 Practica y razona . . . 8

4 Funciones polinómicas **9**
4.1 Constantes, proporcionales y afines . . . 9
4.2 La parábola . . . 9
4.3 Grado superior . . . 9
4.4 Practica y razona . . . 10

5 Funciones racionales **11**
5.1 Cocientes y proporcionalidad inversa . . . 11
5.2 Traslaciones . . . 11
5.3 Huecos y asíntotas no son lo mismo . . . 11
5.4 Practica y razona . . . 12

6 Funciones radicales y valor absoluto **13**
6.1 Raíz cuadrada y traslaciones . . . 13
6.2 Valor absoluto y distancia . . . 13
6.3 Practica y razona . . . 13

7 Funciones exponenciales **15**
7.1 La variable en el exponente . . . 15
7.2 Aumento y disminución . . . 15
7.3 Validez del modelo . . . 15
7.4 Practica y razona . . . 16

8 Funciones logarítmicas **17**
8.1 Inversa de la exponencial . . . 17
8.2 Restricciones y escalas . . . 17
8.3 Practica y razona . . . 17

9 Funciones trigonométricas **19**
9.1 Gráficas y periodicidad . . . 19
9.2 Amplitud, período y línea media . . . 19
9.3 Practica y razona . . . 20

10 Transformaciones y construcción de funciones **21**
10.1 Mover y reflejar una gráfica . . . 21
10.2 Funciones a trozos . . . 21
10.3 Construir bajo condiciones . . . 21
10.4 Practica y razona . . . 21

11 Calculadora y GeoGebra **23**
11.1 Evaluación y tablas en CASIO . . . 23
11.2 Representar y contrastar . . . 23
11.3 Tarea de comparación . . . 23
11.4 Practica y razona . . . 23

12 Problemas integrados y síntesis **24**
12.1 Estudiar sin derivadas . . . 24
12.2 Modelizar y leer críticamente . . . 24
12.3 Revisión personal . . . 24
12.4 Practica y razona . . . 24

A Formulario y mapa de funciones **25**
A.1 Dominio, operaciones y propiedades . . . 25
A.2 Familias principales . . . 25
A.3 Transformar y modelizar . . . 25

B Práctica global **26**

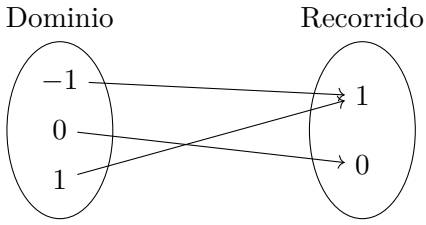
C Autoevaluación de 20 preguntas **27**

Capítulo 1

Concepto de función. Dominio y recorrido

1.1 Una entrada, una salida

Una función asigna a cada valor x de su dominio un único valor $y = f(x)$. La variable independiente es la entrada; la dependiente es la salida. Distintas entradas pueden tener la misma salida. El dominio contiene las entradas admitidas; el recorrido o imagen contiene las salidas que realmente se alcanzan. No confundas recorrido con un conjunto de llegada que puede ser más amplio. Podemos describir una función mediante palabras, un diagrama de correspondencia, una tabla, una fórmula o una gráfica. En una gráfica, cada recta vertical corta a lo sumo en un punto. Una tabla finita no permite conocer sin información adicional todos los valores de una función real.



Este diagrama restringe $f(x) = x^2$ al dominio $\{-1, 0, 1\}$: su recorrido es $\{0, 1\}$. La fórmula x^2 en todo $\mathbb{R}$ tiene otro dominio y otro recorrido.

1.2 Imágenes, antecedentes y restricciones

Calcular $f(a)$ es sustituir $x = a$. Hallar los antecedentes de b es resolver $f(x) = b$ dentro del dominio; puede haber ninguno, uno o varios. En un cociente, el denominador debe ser distinto de cero; en una raíz par, el radicando no negativo; en un logaritmo, el argumento positivo. Las condiciones se cumplen simultáneamente. En un contexto se añaden restricciones: tiempo no negativo, cantidades enteras o capacidad máxima.

Ejemplo resuelto

$f(x) = x^2 - 4$ tiene dominio $\mathbb{R}$, recorrido $[-4, +\infty)$ e imagen de -3 igual a 5. Los antecedentes de 5 son $-3, 3$. Para $g(x) = \sqrt{x-1}/(x-4)$, el dominio es $[1, 4) \cup (4, +\infty)$.

1.3 Practica y razona

U07-01

Para $f(x) = x^2 - 4$, calcula $f(-3)$, los antecedentes de 5 y los de -5.
(Respuesta: 5; $-3, 3$; ninguno.)

U07-02

Halla el dominio de $\sqrt{7 - 2x}$ y de $1/(x^2 - 9)$.
(Respuesta: $(-\infty, 7/2]$ y $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.)

U07-03

Halla dominio de $\ln(x^2 - 4)$ y recorrido de $-(x - 1)^2 + 5$.
(Respuesta: $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$; $(-\infty, 5]$.)

U07-04

El coste de x entradas es $C(x) = 8x$. Solo quedan 20 entradas. Escribe el dominio contextual y el recorrido.
(Respuesta: $x \in \{0, 1, \ldots, 20\}$; $\{0, 8, \ldots, 160\}$ euros.)

Resumen del capítulo

Dominio: entradas válidas; recorrido: salidas alcanzadas; imagen por sustitución y antecedentes mediante una ecuación.

Capítulo 2

Operaciones con funciones

2.1 Operaciones y sus dominios

Definimos $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ y $(fg)(x) = f(x)g(x)$ en la intersección de los dominios. En f/g se excluyen además los ceros de g. Una simplificación algebraica no recupera automáticamente los valores excluidos de la operación original.

Ejemplo resuelto

Con $f(x) = x + 1$, $g(x) = x - 2$, $(f + g)(x) = 2x - 1$ y $(f/g)(x) = (x + 1)/(x - 2)$, cuyo dominio excluye 2.

2.2 Componer en el orden correcto

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$: primero actúa g, luego f. Se requiere $x \in D_g$ y $g(x) \in D_f$. En general cambiar el orden cambia la función.

Ejemplo resuelto

$f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x - 3$: $f \circ g = \sqrt{x - 3}$ en $[3, +\infty)$; $g \circ f = \sqrt{x} - 3$ en $[0, +\infty)$.

2.3 La función inversa

Una función tiene inversa como función sobre su recorrido si cada salida tiene un único antecedente. Para $f(x) = 2x + 1$, invertir las operaciones da $f^{-1}(x) = (x - 1)/2$. Su gráfica es simétrica de la original respecto de $y = x$ porque se intercambian las coordenadas. $f^{-1}(x)$ no significa $1/f(x)$. La función x^2 no tiene inversa en todo $\mathbb{R}$: 1 y -1 tienen la misma imagen. Restringida a $[0, +\infty)$, sí: su inversa es $\sqrt{x}$, con dominio y recorrido también $[0, +\infty)$.

2.4 Practica y razona

U07-05

Para $f(x) = x + 1$, $g(x) = x - 2$, calcula suma, resta, producto y cociente, indicando dominios.
(Respuesta: $2x - 1$, 3, $x^2 - x - 2$ en $\mathbb{R}$; $(x + 1)/(x - 2)$ en $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.)

U07-06

Con $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^2$, calcula ambas composiciones.
(Respuesta: $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 1$; $(g \circ f)(x) = (2x - 1)^2$, ambas en $\mathbb{R}$.)

U07-07

Con $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x-3$, determina las composiciones y sus dominios.
(Respuesta: $\sqrt{x-3}$ en $[3,+\infty)$; $\sqrt{x}-3$ en $[0,+\infty)$.)

U07-08

Halla la inversa de $f(x)=3x+6$ y comprueba la composición. Compárala con el recíproco.
(Respuesta: $f^{-1}(x)=(x-6)/3$; $1/f(x)=1/(3x+6)$, distinta.)

Resumen del capítulo

Operar exige dominios comunes; componer exige comprobar la salida intermedia; inversa y recíproco son distintos.

Capítulo 3

Propiedades de las funciones

3.1 Leer una gráfica

Los ceros son los valores de x con $f(x) = 0$; los puntos correspondientes son los cortes con el eje horizontal. El corte vertical es $(0, f(0))$ si existe. El signo se lee sobre o bajo el eje X. En un intervalo, una función es estrictamente creciente si $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$; decreciente si ocurre lo contrario; constante si las salidas no cambian. Se suele hablar de creciente en sentido amplio con $\leq$: aquí indicaremos cuándo el crecimiento es estricto. Un máximo relativo domina los valores próximos dentro del dominio; uno absoluto domina todos los valores. En un intervalo cerrado también se revisan los extremos. No confundas la abscisa donde se alcanza el extremo con su valor o con el punto completo.

3.2 Simetría, periodicidad y continuidad intuitiva

Con dominio simétrico, $f(-x) = f(x)$ caracteriza una función par, simétrica respecto de Y; $f(-x) = -f(x)$ caracteriza una impar, simétrica respecto del origen. Una función periódica repite sus valores cada $T > 0$, con dominio compatible con esa traslación. El menor período positivo, si existe, es el fundamental. La continuidad se explora observando que no haya huecos ni saltos al aproximarse a un punto del dominio. La imagen del lápiz es una ayuda, no una definición: U8 precisará las condiciones mediante límites.

3.3 Tasa de variación media

$$\mathrm{TVM}_{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \qquad a < b.$$

Es la pendiente de la secante y mide cambio medio de la salida por unidad de entrada. No es, en general, la variación en cada instante.

Ejemplo resuelto

Para $f(x) = x^2$ en $[1, 3]$, la variación total es $9 - 1 = 8$, mientras que la TVM es $8/(3 - 1) = 4$.

3.4 Practica y razona

U07-09

Estudia ceros, signo, crecimiento y mínimo de $f(x) = x^2 - 4$.
(Respuesta: Ceros ± 2; positiva fuera de $[-2, 2]$, negativa entre -2 y 2; decrece hasta 0 y crece después; mínimo -4 en 0.)

U07-10

Decide si x^2, x^3 y $x + 1$ son pares, impares o ninguna de ambas.
(Respuesta: Par; impar; ninguna.)

U07-11

Para $f(x) = x^2$ en $[-1, 2]$, halla extremos absolutos y TVM.
(Respuesta: Mínimo 0 en 0; máximo 4 en 2; TVM 1.)

U07-12

Una temperatura pasa de 18 a 26 grados entre las 10 y las 14 h. Calcula variación y TVM. ¿Demuestra que subió uniformemente?
(Respuesta: 8 grados; 2 grados por hora; no.)

Resumen del capítulo

Separar valor y lugar del extremo, variación total y tasa media, y lectura intuitiva de continuidad y su justificación.

Capítulo 4

Funciones polinómicas

4.1 Constantes, proporcionales y afines

$f(x) = c$ es horizontal. $f(x) = mx$ modeliza proporcionalidad directa y pasa por el origen. $f(x) = mx + n$ tiene pendiente m y ordenada n; crece si $m > 0$, decrece si $m < 0$ y es constante si $m = 0$. De dos puntos con abscisas distintas, $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ y después se obtiene n por sustitución.

4.2 La parábola

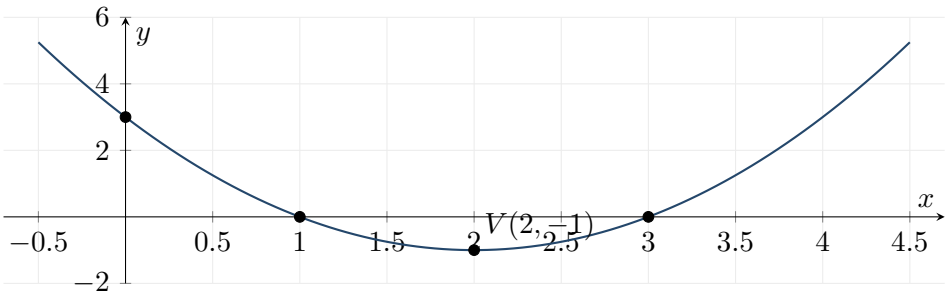
Para $a \neq 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - h)^2 + k$, con $h = -b/(2a)$ y $k = f(h)$. Vértice (h, k), eje $x = h$, abre arriba para $a > 0$ y abajo para $a < 0$. Su dominio es $\mathbb{R}$; recorrido $[k, +\infty)$ o $(-\infty, k]$, respectivamente. Los cortes horizontales se obtienen resolviendo la cuadrática y el vertical es $(0, c)$. No hace falta derivar para hallar estos extremos.

Ejemplo resuelto

$f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$: vértice $(2, -1)$, ceros $1, 3$ y corte vertical $(0, 3)$. Decrece en $(-\infty, 2)$ y crece en $(2, +\infty)$; mínimo absoluto -1.

4.3 Grado superior

En un polinomio sencillo, calcula puntos y ceros, estudia signos y usa simetrías conocidas para esbozar. Los ceros no siempre son cruces: $x^2(x - 1)$ toca el eje en 0 y cruza en 1. Sin derivadas no se propone localizar exactamente todos los extremos de cualquier polinomio.



4.4 Practica y razona

U07-13

Halla la función afín que pasa por $(0, 3)$ y $(2, 7)$.
(Respuesta: $f(x) = 2x + 3$.)

U07-14

Estudia vértice, eje, cortes y recorrido de $x^2 - 4x + 3$.
(Respuesta: $(2, -1)$; $x = 2$; $(1, 0), (3, 0), (0, 3)$; $[-1, +\infty)$.)

U07-15

Un beneficio es $B(x) = -x^2 + 20x - 64$, para $0 \leq x \leq 20$. Halla máximo y cantidades con beneficio positivo.
(Respuesta: Máximo 36 en $x = 10$; positivo para $4 < x < 16$.)

U07-16

Para $f(x) = x^2(x - 1)$, localiza ceros y signo a ambos lados de cada uno. ¿Dónde cruza el eje?
(Respuesta: Ceros $0, 1$; negativa para $x < 1$ salvo 0; positiva para $x > 1$. Cruza solo en 1.)

Resumen del capítulo

Rectas por pendiente; parábolas por vértice y cortes; ceros de un polinomio no siempre implican cruce.

Capítulo 5

Funciones racionales

5.1 Cocientes y proporcionalidad inversa

Una función racional es cociente de polinomios, con denominador no nulo. Para $k \neq 0$, $f(x) = k/x$ tiene dominio y recorrido $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sus ramas se acercan a $x = 0$ e $y = 0$ sin alcanzar esos ejes. Esas rectas son sus asíntotas vertical y horizontal; U8 justificará este acercamiento con límites. Si $k > 0$, las ramas están en I y III; si $k < 0$, en II y IV. En repartos de un coste fijo entre personas, el dominio contextual es positivo y discreto.

5.2 Traslaciones

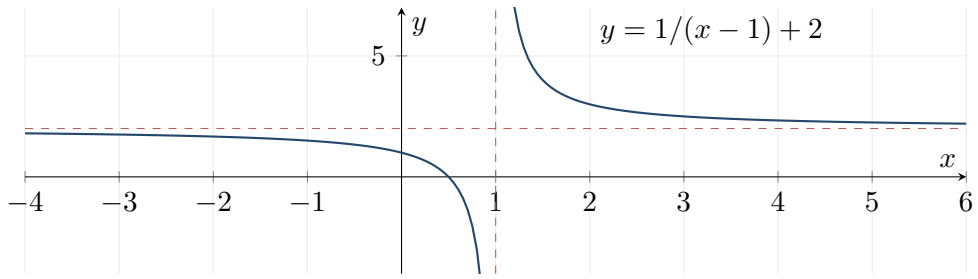
Para $f(x) = a/(x-h)+k$, $a \neq 0$, las asíntotas son $x = h$ e $y = k$, el dominio excluye h y el recorrido excluye k.

Ejemplo resuelto

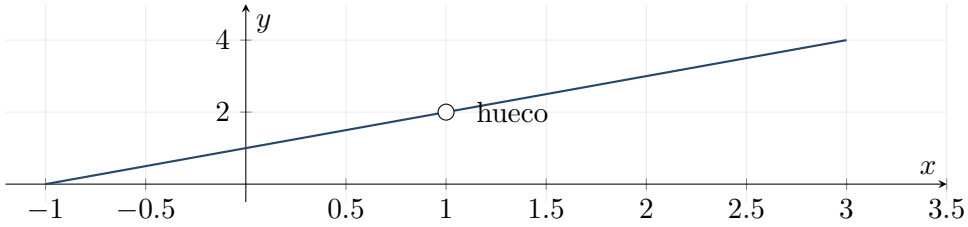
$f(x) = (2x+1)/(x-3) = 2+7/(x-3)$. Dominio $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, asíntotas $x = 3$, $y = 2$; cortes $(-1/2, 0)$ y $(0, -1/3)$.

5.3 Huecos y asíntotas no son lo mismo

$g(x) = (x^2-1)/(x-1)$ coincide con $x+1$ para $x \neq 1$, pero tiene un hueco en $(1, 2)$. No tiene asíntota vertical en 1: sus valores próximos están próximos a 2. Simplificar ayuda a dibujar, pero no elimina la restricción original.



En este gráfico de ejemplo, las asíntotas son $x = 1$ e $y = 2$.



5.4 Practica y razona

U07-17

Para $f(x) = 6/x$, indica dominio, recorrido y valor en 2.
(Respuesta: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ en ambos; $f(2) = 3$.)

U07-18

Estudia dominio, asíntotas y cortes de $(2x + 1)/(x - 3)$.
(Respuesta: Dominio excluye 3; asíntotas $x = 3, y = 2$; cortes $(-1/2, 0), (0, -1/3)$.)

U07-19

Esboza $(x^2 - 1)/(x - 1)$ y señala la diferencia con la recta $y = x + 1$.
(Respuesta: La misma recta salvo el hueco $(1, 2)$.)

U07-20

Se reparten 120 euros entre n participantes. Expresa coste por persona y calcula para 6 y 10.
(Respuesta: $C(n) = 120/n$, n entero positivo; 20 y 12 euros.)

Resumen del capítulo

Excluir los ceros del denominador original y comprobar si producen un hueco o un crecimiento sin cota.

Capítulo 6

Funciones radicales y valor absoluto

6.1 Raíz cuadrada y traslaciones

$f(x) = \sqrt{x}$ tiene dominio y recorrido $[0, +\infty)$ y es estrictamente creciente. En $g(x) = \sqrt{x-h} + k$, el dominio es $[h, +\infty)$ y el recorrido $[k, +\infty)$. Si se multiplica por un número negativo, la gráfica se refleja y su recorrido cambia de sentido.

Ejemplo resuelto

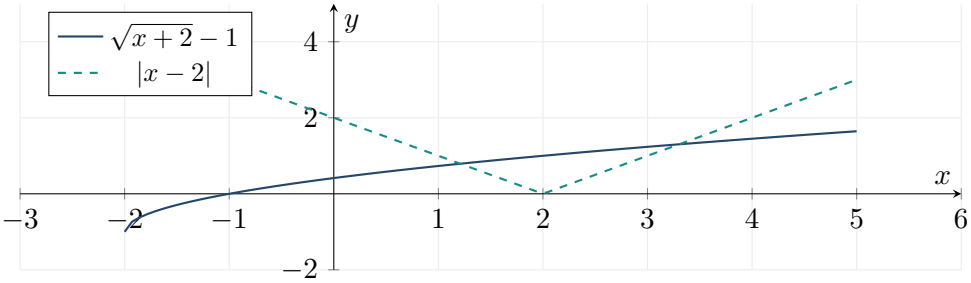
$g(x) = \sqrt{x+2} - 1$ empieza en $(-2, -1)$, tiene dominio $[-2, +\infty)$, recorrido $[-1, +\infty)$ y cero en $x = -1$.

6.2 Valor absoluto y distancia

$|x|$ es la distancia de x a 0 y $|x-a|$, la distancia a a. Su gráfica tiene forma de V. Se escribe $|x| = -x$ para $x < 0$ y $|x| = x$ para $x \geq 0$.

$$|x-2| = \begin{cases} 2-x, & x < 2, \\ x-2, & x \geq 2. \end{cases}$$

Tiene mínimo 0 en 2, dominio $\mathbb{R}$ y recorrido $[0, +\infty)$. Al representar $|f(x)|$, las partes negativas de la gráfica se reflejan hacia arriba y las no negativas permanecen.



6.3 Practica y razona

U07-21

Halla dominio, recorrido y punto inicial de $\sqrt{x+2} - 1$.
(Respuesta: $[-2, +\infty)$; $[-1, +\infty)$; $(-2, -1)$.)

U07-22

Escribe $|x-3|$ a trozos y halla sus antecedentes de 2.
(Respuesta: $3-x$ si $x<3$, $x-3$ si $x\geq 3$; antecedentes $1, 5$.)

U07-23

Halla dominio y recorrido de $-2\sqrt{x-1}+3$.
(Respuesta: $[1,+\infty)$ y $(-\infty,3]$.)

Resumen del capítulo

Raíces pares: radicando no negativo; valor absoluto: distancia y definición por tramos.

Capítulo 7

Funciones exponenciales

7.1 La variable en el exponente

Para $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) = a^x$ tiene dominio $\mathbb{R}$, recorrido $(0, +\infty)$ y pasa por $(0, 1)$. Es creciente si $a > 1$ y decreciente si $0 < a < 1$. No corta el eje X; $y = 0$ es asíntota horizontal en el extremo donde sus valores se aproximan a cero. No confundir a^x con x^a.

7.2 Aumento y disminución

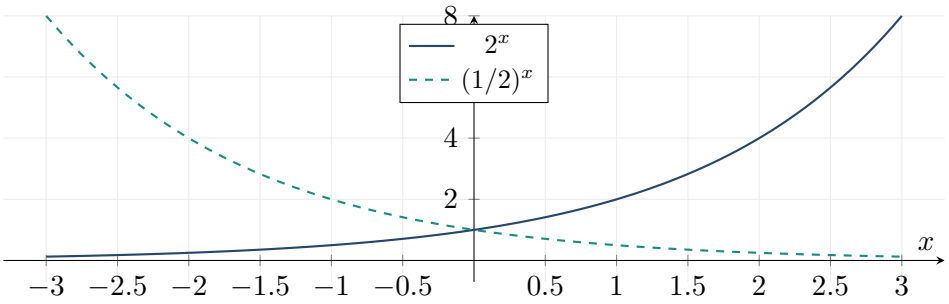
En $N(t) = N_0 a^t$, N_0 es el valor inicial y a el factor por unidad de tiempo. Un aumento del 8% usa $a = 1{,}08$; una disminución del 20%, $a = 0{,}8$. En recuentos, el modelo puede dar valores reales que se interpretan como aproximaciones, no como fracciones literales de personas.

Ejemplo resuelto

Un cultivo se duplica cada tres horas: $N(t) = 200 \cdot 2^{t/3}$, $t \geq 0$. A las seis horas hay 800 bacterias según el modelo. Para alcanzar 1600, $2^{t/3} = 8$ y $t = 9$ h.

7.3 Validez del modelo

Un crecimiento exponencial no puede extrapolarse sin límite en un medio con recursos finitos. Identifica el intervalo de observación y contrasta las predicciones con los supuestos. No se introduce interés compuesto.



7.4 Practica y razona

U07-24

Compara dominio, recorrido y monotonía de 2^x y $(1/2)^x$.
(Respuesta: Ambas: dominio $\mathbb{R}$ y recorrido $(0, +\infty)$; primera creciente y segunda decreciente.)

U07-25

Un cultivo empieza con 200 bacterias y se duplica cada 3 h. Halla el modelo, cantidad a las 6 h y tiempo para llegar a 1600.
(Respuesta: $200 \cdot 2^{t/3}$; 800; 9 h.)

U07-26

Una sustancia conserva el 80% por hora de su cantidad. Parte de 500 mg. Halla el modelo y cantidad a las tres horas.
(Respuesta: $M(t) = 500(0{,}8)^t$; 256 mg.)

U07-27

Una plataforma modeliza usuarios por $U(t) = 1000(1{,}1)^t$, con t en meses. Calcula $U(2)$ y explica una limitación a largo plazo.
(Respuesta: 1210 usuarios; recursos y población potencial limitan la extrapolación.)

Resumen del capítulo

Reconocer valor inicial y factor por unidad de tiempo; distinguir crecimiento del modelo y viabilidad de su extrapolación.

Capítulo 8

Funciones logarítmicas

8.1 Inversa de la exponencial

$\log_a x = y$ equivale a $a^y = x$, con $a > 0$, $a \neq 1$ y $x > 0$. Por tanto, $\log_a(a^x) = x$ y $a^{\log_a x} = x$ donde corresponda. El dominio del logaritmo es $(0, +\infty)$, recorrido $\mathbb{R}$, cero en $x = 1$ y asíntota vertical $x = 0$. Es creciente para $a > 1$ y decreciente para $0 < a < 1$; no tiene corte vertical. Su gráfica y la exponencial de la misma base se reflejan sobre $y = x$.

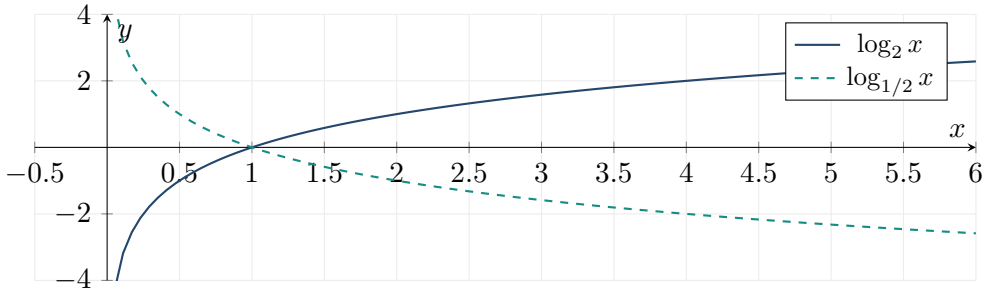
8.2 Restricciones y escalas

En $\log_a(g(x))$ se exige $g(x) > 0$, no $g(x) \geq 0$. El logaritmo convierte factores multiplicativos en diferencias aditivas.

Ejemplo resuelto

Con la escala escolar $L = 10 \log_{10}(I/I_0)$, multiplicar la intensidad por 100 aumenta el nivel 20 dB. No significa que duplicar el número de decibelios duplique la intensidad.

En el modelo escolar de pH, $\text{pH} = -\log_{10} c$, con c concentración de iones hidrógeno expresada en mol/L respecto a la referencia de 1 mol/L. Para una escala sísmica simplificada $M = \log_{10}(A/A_0)$, un aumento de una unidad corresponde a diez veces la amplitud relativa; no a diez veces la energía. Son modelos de escala, no instrucciones para mediciones profesionales.



8.3 Practica y razona

U07-28

Halla dominio, cero y monotonía de $\log_2 x$ y $\log_{1/2} x$.
(Respuesta: Dominio positivo y cero 1 en ambas; creciente y decreciente, respectivamente.)

U07-29

Halla el dominio de $\log_{10}(5-2x)$ y su cero.
(Respuesta: $(-\infty, 5/2)$; cero en $x = 2$.)

U07-30

Compara niveles sonoros con intensidades en razón 1000 : 1. Calcula también pH para $c = 10^{-4}$ mol/L.
(Respuesta: Diferencia 30 dB; pH 4.)

U07-31

En $M = \log_{10}(A/A_0)$, compara amplitudes relativas para magnitudes 5 y 3.
(Respuesta: La primera amplitud es 100 veces la segunda.)

Resumen del capítulo

Argumento positivo; logaritmo inverso de la exponencial; una diferencia logarítmica expresa un cociente.

Capítulo 9

Funciones trigonométricas

9.1 Gráficas y periodicidad

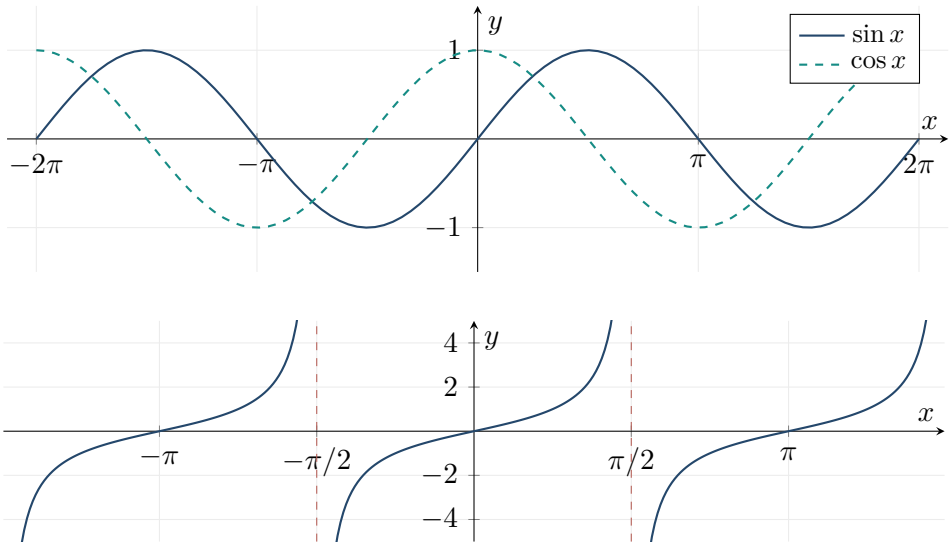
En este apartado el argumento se expresa en radianes. Seno y coseno tienen dominio $\mathbb{R}$, recorrido $[-1, 1]$ y período fundamental 2π. La circunferencia goniométrica explica las coordenadas $(\cos x, \sin x)$ y la repetición tras una vuelta. Los ceros del seno son $k\pi$; los del coseno, $\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. La tangente tiene dominio $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi\}$, recorrido $\mathbb{R}$, ceros $k\pi$ y período fundamental π. Presenta asíntotas verticales en los valores excluidos; no unas ramas con otras atravesando esas rectas al dibujar.

9.2 Amplitud, período y línea media

Para $A\sin(Bx) + D$ o $A\cos(Bx) + D$, con $A, B \neq 0$, amplitud $|A|$, período $2\pi/|B|$, línea media D y recorrido $[D - |A|, D + |A|]$. Si $A = 0$ o $B = 0$, la función es constante y esta fórmula no se interpreta como período fundamental.

Ejemplo resuelto

$h(t) = 2\sin(\pi t/6) + 3$, con t en horas, tiene período 12 h, amplitud 2 y valores entre 1 y 5. Puede describir una oscilación ideal, siempre indicando qué magnitud mide la salida.



9.3 Practica y razona

U07-32

Da dominio, recorrido y período fundamental de seno, coseno y tangente.
(Respuesta: Seno y coseno: $\mathbb{R}$, $[-1,1]$, 2π. Tangente: excluir $\pi/2 + k\pi$, recorrido $\mathbb{R}$, período π.)

U07-33

Halla amplitud, período, línea media y recorrido de $3\sin(2x) - 1$.
(Respuesta: 3; π; $y = -1$; $[-4, 2]$.)

U07-34

Para $h(t) = 2\sin(\pi t/6) + 3$, calcula $h(0)$, $h(3)$ y período.
(Respuesta: 3, 5 y 12 unidades de tiempo.)

Resumen del capítulo

Fijar radianes, distinguir período y amplitud y separar las ramas de la tangente en sus asíntotas.

Capítulo 10

Transformaciones y construcción de funciones

10.1 Mover y reflejar una gráfica

$f(x-h)+k$ traslada la gráfica h horizontalmente y k verticalmente. Si $(u, f(u))$ era un punto, ahora $(u+h, f(u)+k)$ lo es: esta sustitución explica el signo del desplazamiento horizontal. $-f(x)$ refleja sobre X y $f(-x)$ sobre Y. Multiplicar por a escala las ordenadas por $|a|$, añadiendo reflexión si $a<0$; $f(bx)$, $b\neq 0$, escala abscisas por $1/|b|$ y refleja sobre Y si $b<0$.

10.2 Funciones a trozos

Una expresión distinta actúa en cada intervalo. Evalúa primero a qué intervalo pertenece la entrada. En un punto de unión, un punto lleno indica valor incluido y uno abierto indica valor excluido. Debe quedar una única salida por entrada del dominio.

Ejemplo resuelto

Una tarifa es $C(t)=2t$ para $0\leq t<2$ y $C(t)=4+1{,}5(t-2)$ para $t\geq 2$. En 2 se usa la segunda rama: $C(2)=4$. Las dos se aproximan al mismo valor; U8 justificará la continuidad.

10.3 Construir bajo condiciones

Para una recta usa dos datos independientes; para una parábola de vértice conocido usa $a(x-h)^2+k$ y determina a con otro punto. No siempre hay una única función que cumpla unas condiciones: busca y explica si hay libertad para elegir.

10.4 Practica y razona

U07-35

Obtén $g(x)=-(x-2)^2+3$ a partir de x^2. Indica vértice y recorrido.
(Respuesta: Derecha 2, reflexión sobre X, arriba 3; vértice $(2,3)$, recorrido $(-\infty,3]$.)

U07-36

En la tarifa del ejemplo calcula $C(1)$, $C(2)$ y $C(4)$.
(Respuesta: 2, 4 y 7 euros.)

U07-37

Construye una parábola de vértice $(1, -2)$ que pase por $(3, 6)$.
(Respuesta: $f(x) = 2(x-1)^2 - 2$.)

U07-38

Compara $f(2x)$ y $2f(x)$ para $f(x) = x^2$.
(Respuesta: $4x^2$ y $2x^2$, distintas.)

Resumen del capítulo

Relacionar cada transformación con las coordenadas; en funciones a trozos, comprobar intervalos y puntos de unión.

Capítulo 11

Calculadora y GeoGebra

11.1 Evaluación y tablas en CASIO

En fx-991SP CW abre HOME y Tabla; en fx-570SP X II, MENU y Tabla. Introduce la expresión en x, el valor inicial, final y paso, respetando su dominio. Para $f(x) = x^2 - 4$, usa inicio -3, fin 3 y paso 1. Conserva la tabla con las entradas, no solo la pantalla final. Un mensaje de error en $1/(x-2)$ para $x = 2$ expresa una restricción; no lo sustituyas por cero. Para trigonométricas, comprueba DEG/RAD: en radianes $\sin(\pi/2) = 1$. Usa CONFIG, Unidad angular, en la CW; SHIFT y MENU (CONFIG) en la X II. La tabla puede no incluir un vértice o un hueco si el paso los omite.

11.2 Representar y contrastar

En la calculadora gráfica de GeoGebra introduce $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = (x-2)^2 - 1$: sus gráficas deben coincidir. Marca $(2, -1)$ y los cortes $(1, 0), (3, 0)$. Cambia la ventana hasta ver los rasgos relevantes; una ventana inadecuada puede ocultar un mínimo o hacer parecer recta una curva.

11.3 Tarea de comparación

En parejas, elige una familia y compara tres valores de un parámetro, registrando fórmula, dominio, recorrido y gráfico. Formula una conjetura y justifícala con la expresión. Cada integrante debe explicar un caso y un límite de la evidencia visual; los gráficos aproximados no prueban por sí solos todas las propiedades.

11.4 Practica y razona

U07-39

Construye la tabla de $x^2 - 4$ para $x = -2, -1, 0, 1, 2$. ¿Permite deducir todo el recorrido sin más justificación?
(Respuesta: $0, -3, -4, -3, 0$; no por sí sola.)

U07-40

Una tabla de $1/(x-2)$ usa entradas 1,5, 2,5, 3,5. ¿Detecta directamente que no existe $f(2)$?
(Respuesta: No; no contiene esa entrada.)

Resumen del capítulo

Tablas y gráficos ayudan a comprobar; declarar dominio, unidad angular, paso y ventana para interpretar sus límites.

Capítulo 12

Problemas integrados y síntesis

12.1 Estudiar sin derivadas

Identifica familia y dominio, calcula cortes, usa una forma conocida o transformada, estudia signo, simetría y variación mediante argumentos elementales y esboza. Explica el recorrido y los extremos que puedas justificar. El estudio de límites completará después las asíntotas; la derivada pertenece a otra unidad.

12.2 Modelizar y leer críticamente

Distingue una recta de un crecimiento multiplicativo, una proporcionalidad inversa de una relación lineal y una oscilación de una tendencia. Escribe unidades y dominio físico. En un gráfico ambiental, comprueba el eje vertical, escala temporal y procedencia de los datos antes de comparar tendencias; aquí no se presentan cifras reales sin fuente.

Ejemplo resuelto

Un taxi cobra 3 euros de inicio y 1,20 por kilómetro: $C(x) = 3 + 1{,}2x$, $x \geq 0$. A 8 km son 12,60 euros; no es proporcionalidad directa porque el coste inicial no es cero.

12.3 Revisión personal

Elige una propiedad que inferiste de un dibujo y compruébala con álgebra. Redacta el error inicial, su corrección y qué dato te permitió detectarlo. En una discusión de modelos, distingue dato observado y predicción.

12.4 Practica y razona

U07-41

Un ingreso es $R(x) = 18x$ y un coste $C(x) = 100 + 8x$. Halla equilibrio y condición de beneficio positivo para cantidades enteras no negativas.
(Respuesta: Equilibrio $x = 10$; beneficio positivo para enteros $x \geq 11$.)

U07-42

¿Basta que dos curvas se crucen en tres puntos para que representen la misma función?
(Respuesta: No.)

Resumen del capítulo

Elegir una familia por el significado del contexto y justificar las propiedades sin anticipar técnicas de derivación.

Formulario y mapa de funciones

A.1 Dominio, operaciones y propiedades

Denominador distinto de cero; raíz par con radicando no negativo; logaritmo con argumento positivo. Intersecar condiciones y añadir restricciones del contexto. El recorrido se justifica a partir de las salidas alcanzadas, no solo de una tabla.

Operaciones $f \pm g$, fg: dominio común. Cociente f/g: excluir además $g = 0$. Composición $f \circ g$: $x \in D_g$ y $g(x) \in D_f$. Inversa: cada salida tiene un único antecedente; no confundir f^{-1} con $1/f$.

Ceros: resolver $f(x) = 0$. Corte vertical: $(0, f(0))$ si existe. Par: dominio simétrico y $f(-x) = f(x)$; impar: $f(-x) = -f(x)$. TVM en $[a, b]$: $(f(b) - f(a))/(b - a)$, $a < b$.

A.2 Familias principales

Familia	Rasgos básicos
Afín $mx + n$	Dominio $\mathbb{R}$; pendiente m. Proporcionalidad directa si $n = 0$.
Cuadrática $a(x - h)^2 + k$	Vértice (h, k); eje $x = h$. Si $a > 0$, mínimo k y recorrido $[k, +\infty)$; si $a < 0$, máximo y recorrido $(-\infty, k]$.
Racional $a/(x - h) + k$	$a \neq 0$; dominio excluye h, recorrido excluye k. Asíntotas $x = h$, $y = k$. Revisar huecos tras simplificar.
Raíz $\sqrt{x - h} + k$	Dominio $[h, +\infty)$, recorrido $[k, +\infty)$.
Valor absoluto $\lvert x - h\rvert + k$	Dominio $\mathbb{R}$, mínimo k en h. Definir por tramos al cambiar el signo interior.
Exponencial a^x	$a > 0, a \neq 1$; dominio $\mathbb{R}$, recorrido positivo. Crece si $a > 1$, decrece si $0 < a < 1$; pasa por $(0, 1)$.
Logarítmica $\log_a x$	Mismas restricciones de base; dominio positivo, recorrido $\mathbb{R}$, cero 1. Inversa de a^x; asíntota $x = 0$.
Seno y coseno	Dominio $\mathbb{R}$, recorrido $[-1, 1]$, período 2π en radianes. Tangente: excluir $\pi/2 + k\pi$, período π, recorrido $\mathbb{R}$.

A.3 Transformar y modelizar

$f(x - h) + k$: trasladar h horizontal y k vertical. $-f(x)$: reflexión sobre X; $f(-x)$: sobre Y. $af(x)$ escala salidas por $|a|$; $f(bx)$ escala abscisas por $1/|b|$, $b \neq 0$, con reflexión si el factor es negativo.

En $A\sin(Bx)+D$ o $A\cos(Bx)+D$, $A, B \neq 0$: amplitud $|A|$, período $2\pi/|B|$, recorrido $[D-|A|, D+|A|]$. En $N_0 a^{t/T}$, T indica la duración de cada factor multiplicativo a.

Resumen del capítulo

Elegir familia y dominio → obtener rasgos con álgebra → representar → comprobar escala, unidades y validez del modelo.

Apéndice B

Práctica global

Resuelve con el método acordado, explica cada paso y comprueba tus resultados.

U07-G01

Estudia dominio, recorrido, vértice y cortes de $f(x) = -(x-2)^2 + 4$.
(Respuesta: $\mathbb{R}$; $(-\infty, 4]$; $(2, 4)$; $(0, 0), (4, 0)$.)

U07-G02

Con $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x + 2$, calcula las composiciones y sus dominios.
(Respuesta: $\sqrt{x+2}$ en $[-2, +\infty)$; $\sqrt{x} + 2$ en $[0, +\infty)$.)

U07-G03

Estudia dominio, recorrido y asíntotas intuitivas de $3/(x+1) - 2$.
(Respuesta: Excluir -1; recorrido excluye -2; asíntotas $x = -1, y = -2$.)

U07-G04

Para $f(x) = |x - 2|$, calcula ceros, mínimo, crecimiento y TVM en $[0, 4]$.
(Respuesta: Cero y mínimo en $(2, 0)$; decrece antes y crece después de 2; TVM 0.)

U07-G05

Una población sigue $N(t) = 300 \cdot 2^{t/4}$. Halla $N(8)$ y el tiempo de alcanzar 2400.
(Respuesta: 1200; 12 unidades de tiempo.)

U07-G06

Un nivel sonoro aumenta 20 dB en el modelo de intensidad. ¿Por qué factor cambia la intensidad?
(Respuesta: 100.)

U07-G07

Para $h(t) = 4\cos(\pi t/3) + 1$, halla amplitud, período, recorrido e imagen de 0.
(Respuesta: 4, 6, $[-3, 5]$, 5.)

U07-G08

Una tarifa tiene $C(t) = 3t$ para $0 \le t < 2$ y $C(t) = 6 + 2(t-2)$ para $t \ge 2$. Calcula coste en $1, 2, 5$ y compara su crecimiento por tramos.
(Respuesta: $3, 6, 12$; pendiente 3 antes de 2 y 2 después.)

Apéndice C

Autoevaluación de 20 preguntas

Una sola respuesta correcta. Anota tus elecciones y justifica las que te hayan generado dudas. La clave está exclusivamente en el documento docente.

Pregunta 1

El dominio de $\sqrt{x-3}$ es:

A) $\mathbb{R}$

B) $[3, +\infty)$

C) $(3, +\infty)$

D) $(-\infty, 3]$

Pregunta 2

El recorrido de $-(x-1)^2 + 5$ es:

A) $(-\infty, 5]$

B) $[5, +\infty)$

C) $\mathbb{R}$

D) $(-\infty, 1]$

Pregunta 3

Los antecedentes de 4 en x^2 son:

A) Solo 2

B) Solo -2

C) $-2, 2$

D) $0, 4$

Pregunta 4

f^{-1} significa:

A) Siempre el recíproco

B) La derivada

C) El cuadrado

D) La inversa, si existe

Pregunta 5

Con $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2$, $f \circ g$ es:

A) $2x^2 + 1$

B) $(2x + 1)^2$

C) $2x^2 + x$

D) $x^2 + 1$

Pregunta 6

En el cociente f/g se excluyen además:

A) Los ceros de f

B) Los ceros de g

C) Todas las entradas positivas

D) Ninguna entrada

Pregunta 7

La función x^3 es:

A) Par

B) Constante

C) Impar

D) Periódica

Pregunta 8

La TVM de x^2 en $[1, 3]$ es:

A) 8

B) 2

C) 3

D) 4

Pregunta 9

El vértice de $(x-2)^2-1$ es:

A) $(2,-1)$

B) $(-2,-1)$

C) $(2,1)$

D) $(-1,2)$

Pregunta 10

La pendiente de $3x+2$ es:

A) 2

B) 3

C) 5

D) -3

Pregunta 11

En $2/(x-1)+3$, la asíntota horizontal es:

A) $x=1$

B) $y=0$

C) $y=3$

D) $x=3$

Pregunta 12

$(x^2-1)/(x-1)$ presenta en 1:

A) Una asíntota vertical siempre

B) Un valor 0

C) Un máximo

D) Un hueco con altura 2

Pregunta 13

El dominio de $\log_2(x-1)$ es:

A) $(1, +\infty)$

B) $[1, +\infty)$

C) $\mathbb{R}$

D) $(-\infty, 1)$

Pregunta 14

$(1/2)^x$ es:

A) Creciente

B) Decreciente

C) Constante

D) Negativa

Pregunta 15

Una disminución del 20 por ciento usa factor:

A) 1.2

B) 0.2

C) 0.8

D) -0.2

Pregunta 16

En $3\sin(2x) - 1$, el período es:

A) 2π

B) 3

C) 2

D) π

Pregunta 17

En $f(x-3)$, la gráfica se traslada:

A) Derecha 3

B) Izquierda 3

C) Arriba 3

D) Abajo 3

Pregunta 18

El recorrido de $-2\sqrt{x-1}+3$ es:

A) $[3,+\infty)$

B) $(-\infty,3]$

C) $[1,+\infty)$

D) $\mathbb{R}$

Pregunta 19

Una tabla de cinco valores:

A) Prueba siempre el dominio completo

B) Muestra todos los extremos siempre

C) Puede omitir un hueco

D) Sustituye la justificación algebraica

Pregunta 20

Una tarifa con coste inicial no nulo y precio fijo por kilómetro se modeliza con:

A) Una proporcionalidad directa siempre

B) Una constante siempre

C) Una exponencial necesariamente

D) Una función afín

Revisión personal

Selecciona dos respuestas y explica el procedimiento. Anota un error detectado y una acción concreta para mejorar. No cambies la respuesta sin explicar qué has revisado.