MATEMÁTICAS B

4.º de Educación Secundaria Obligatoria

Unidad 6

Vectores y geometría analítica plana

Manual del alumnado

Curso 2026–2027

Edición V01 · Índice cerrado el 30 de octubre de 2026

Índice

1 Puntos y vectores en el plano **3**
1.1 Posiciones y desplazamientos . . . 3
1.2 Componentes . . . 3
1.3 Practica y razona . . . 3

2 Operaciones con vectores **5**
2.1 Suma y resta gráficas . . . 5
2.2 Operaciones con componentes . . . 5
2.3 Combinaciones y paralelismo . . . 5
2.4 Practica y razona . . . 5

3 Distancias y puntos destacados **7**
3.1 Módulo y distancia . . . 7
3.2 Punto medio y extremo desconocido . . . 7
3.3 Aplicaciones . . . 7
3.4 Practica y razona . . . 7

4 Producto escalar y aplicaciones **9**
4.1 Dos expresiones del mismo producto . . . 9
4.2 Ángulos y perpendicularidad . . . 9
4.3 Ángulos de figuras . . . 9
4.4 Practica y razona . . . 9

5 Ecuaciones de la recta **11**
5.1 Punto y vector director . . . 11
5.2 Continua, general y pendiente . . . 11
5.3 Dos puntos y casos especiales . . . 12
5.4 Practica y razona . . . 12

6 Problemas de incidencia **13**
6.1 Pertenencia y alineación . . . 13
6.2 Intersección mediante sistemas . . . 13
6.3 Interpretar el resultado . . . 13

6.4 Practica y razona 13

7 Posición relativa de dos rectas 15

7.1 Secantes, paralelas y coincidentes 15
7.2 Directores y pendientes 15
7.3 Perpendicularidad y casos verticales 15
7.4 Practica y razona 15

8 Construcción de rectas con condiciones 17

8.1 Paralela por un punto 17
8.2 Perpendicular por un punto 17
8.3 Mediatriz, medianas y alturas 17
8.4 Practica y razona 18

9 Problemas de geometría analítica 19

9.1 Clasificar con evidencias 19
9.2 Planos y diseño urbano 19
9.3 Decidir y comunicar 19
9.4 Practica y razona 19

10 Calculadora y GeoGebra 21

10.1 CASIO: cálculo y comprobación 21
10.2 GeoGebra: comprobar sin sustituir la prueba 21
10.3 Tabla de registro 21
10.4 Practica y razona 21

11 Problemas integrados y síntesis 23

11.1 Elegir la representación 23
11.2 Comprobar de manera distinta 23
11.3 Revisión personal 23
11.4 Practica y razona 23

A Formulario y mapa de procedimientos 24

A.1 Vectores, distancias y punto medio 24
A.2 Producto escalar 24
A.3 Recta por un punto y un director no nulo 24
A.4 Incidencia y construcciones 24

B Práctica global 25

C Autoevaluación de 20 preguntas 26

Capítulo 1

Puntos y vectores en el plano

1.1 Posiciones y desplazamientos

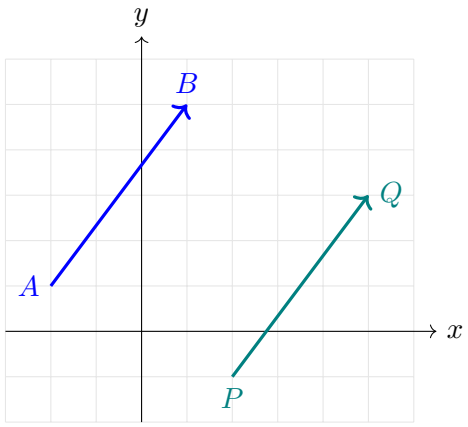
Un punto $A = (a_1, a_2)$ indica una posición. Un vector fijo $\overrightarrow{AB}$ representa el desplazamiento desde A hasta B: su origen y su extremo importan. Su módulo es la longitud, su dirección la de su recta soporte y su sentido va del origen al extremo. Dos vectores fijos equipolentes tienen igual módulo, dirección y sentido y representan el mismo vector libre, aunque estén aplicados en lugares distintos.

1.2 Componentes

En los ejes cartesianos ortonormales, $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$. Primero extremo menos origen. Al invertir el recorrido obtenemos $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. El vector nulo $(0, 0)$ tiene módulo cero y no tiene dirección ni sentido determinados.

Ejemplo resuelto

$A = (-2, 1)$, $B = (1, 5)$ dan $\overrightarrow{AB} = (3, 4)$. El vector aplicado en $P = (2, -1)$ termina en $Q = P + (3, 4) = (5, 3)$. Son vectores fijos distintos, pero equipolentes.



1.3 Practica y razona

U06-01

Halla $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ para $A = (-2, 1)$ y $B = (1, 5)$.
(Respuesta: $(3, 4)$ y $(-3, -4)$.)

U06-02

El vector $(2, -3)$ se aplica en $(1, 5)$. Halla su extremo.
(Respuesta: $(3, 2)$.)

U06-03

¿Son equipolentes los recorridos $(1, 2) \to (3, 5)$ y $(0, 0) \to (2, 3)$?
(Respuesta: Sí.)

U06-04

Explica qué tiene de especial el vector $\overrightarrow{AA}$.
(Respuesta: Es el vector nulo.)

Resumen del capítulo

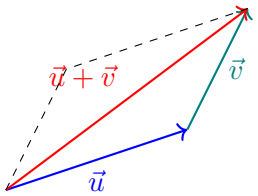
Distinguir posición y desplazamiento; calcular componentes como extremo menos origen.

Capítulo 2

Operaciones con vectores

2.1 Suma y resta gráficas

Para sumar, traslada el segundo vector sin girarlo hasta el extremo del primero. El vector desde el origen inicial al extremo final es la suma: regla del triángulo. Con ambos en un origen común, la diagonal del paralelogramo da la misma suma. Restar $\vec{v}$ es sumar $-\vec{v}$.



2.2 Operaciones con componentes

Si $\vec{u}=(u_1,u_2)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2)$, entonces $\vec{u}\pm\vec{v}=(u_1\pm v_1,u_2\pm v_2)$ y $\lambda\vec{u}=(\lambda u_1,\lambda u_2)$. Para $\lambda>0$ se conserva el sentido; para $\lambda<0$ se invierte; el módulo se multiplica por $|\lambda|$.

Ejemplo resuelto

$\vec{u}=(3,-1)$, $\vec{v}=(-2,4)$: suma $(1,3)$; resta $(5,-5)$; $2\vec{u}-\vec{v}=(8,-6)$.

2.3 Combinaciones y paralelismo

Una combinación lineal es $a\vec{u}+b\vec{v}$. Dos vectores no nulos son paralelos si uno es múltiplo del otro. Con ceros, usa las dos igualdades de componentes; no formes cocientes de denominador cero. Equivalentemente, $u_1v_2-u_2v_1=0$. El vector nulo no se usa como director de una recta.

2.4 Practica y razona

U06-05

Para $\vec{u}=(3,-1)$ y $\vec{v}=(-2,4)$ calcula suma, resta y $2\vec{u}-\vec{v}$.
(Respuesta: $(1,3)$, $(5,-5)$ y $(8,-6)$.)

U06-06

Halla k para que $(2,3)$ y $(6,k)$ sean paralelos.
(Respuesta: $k = 9$.)

U06-07

¿Son paralelos $(0,2)$ y $(0,-5)$? Indica el sentido relativo.
(Respuesta: Sí; sentidos opuestos.)

U06-08

Expresa $(5,1)$ como $a(1,0) + b(1,1)$.
(Respuesta: $a = 4$, $b = 1$.)

U06-09

Un recorrido suma $(3,1)$ y $(1,2)$. Dibuja el triángulo y el paralelogramo de suma.
(Respuesta: Desplazamiento total $(4,3)$.)

Resumen del capítulo

Sumar desplazamientos consecutivos y operar componente a componente; comprobar las dos componentes al estudiar paralelismo.

Capítulo 3

Distancias y puntos destacados

3.1 Módulo y distancia

En ejes ortonormales, Pitágoras da $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. La distancia entre puntos es el módulo de su diferencia:

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Las componentes pueden ser negativas; el módulo nunca es negativo.

3.2 Punto medio y extremo desconocido

El punto medio es $M = ((a_1 + b_1)/2, (a_2 + b_2)/2)$. Si conocemos A y M, despejamos $B = 2M - A$. No se promedian las longitudes de las componentes: se promedian sus coordenadas con signo.

Ejemplo resuelto

$A = (-1, 2)$, $B = (3, 5)$: vector $(4, 3)$, distancia 5 y punto medio $(1, 7/2)$. Si $A = (1, -2)$ y $M = (3, 4)$, entonces $B = (6, 8) - (1, -2) = (5, 10)$.

3.3 Aplicaciones

La igualdad de longitudes permite comprobar lados congruentes. El punto medio común de las diagonales permite reconocer un paralelogramo, siempre que los cuatro vértices formen un cuadrilátero no degenerado y estén ordenados correctamente.

3.4 Practica y razona

U06-10

Halla módulo de $(-6, 8)$.
(Respuesta: 10.)

U06-11

Calcula distancia y punto medio entre $(0, 0)$ y $(6, 8)$.
(Respuesta: 10; $(3, 4)$.)

U06-12

Halla B si $A = (1, -2)$ y $M = (3, 4)$ es el punto medio de AB.
(Respuesta: $(5, 10)$.)

U06-13

Comprueba que $A = (0, 0)$, $B = (4, 0)$, $C = (5, 3)$, $D = (1, 3)$ forman un paralelogramo mediante sus diagonales.
(Respuesta: Ambas diagonales tienen punto medio $(5/2, 3/2)$.)

Resumen del capítulo

Distancia como módulo del desplazamiento; punto medio por promedio y extremo desconocido mediante B igual a 2M menos A.

Capítulo 4

Producto escalar y aplicaciones

4.1 Dos expresiones del mismo producto

Para vectores no nulos que forman ángulo $\theta \in [0°, 180°]$,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

El resultado es un número, no un vector. La expresión con componentes es válida también para el vector nulo. Se deduce de aplicar el teorema del coseno a $\vec{u} - \vec{v}$ y comparar con la suma de cuadrados de sus componentes.

4.2 Ángulos y perpendicularidad

$$\theta = \arccos \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

No se aplica si alguno es nulo. Vectores no nulos son perpendiculares si su producto escalar es cero. Producto positivo: ángulo agudo; negativo: obtuso. El ángulo geométrico entre dos vectores se toma entre 0 y 180 grados.

Ejemplo resuelto

$(1,1) \cdot (1,0) = 1$, módulos $\sqrt{2}$ y 1; $\cos\theta = 1/\sqrt{2}$, luego $\theta = 45°$. Para $(2,3)$ y $(3,-2)$, el producto es $6 - 6 = 0$: son perpendiculares.

4.3 Ángulos de figuras

Para el ángulo en un vértice A, utiliza $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, ambos con origen en A. Usar $\overrightarrow{BA}$ cambia el ángulo por su suplementario. No basta con que un dibujo parezca perpendicular.

4.4 Practica y razona

U06-14

Calcula $(2,-1) \cdot (3,4)$ e indica si el ángulo es agudo u obtuso.
(Respuesta: 2; agudo.)

U06-15

Halla el ángulo entre $(1,1)$ y $(1,0)$.
(Respuesta: $45°$.)

U06-16

Halla k para que $(2,3)$ y $(k,-4)$ sean perpendiculares.
(Respuesta: $k=6$.)

U06-17

Para $A=(0,0)$, $B=(3,0)$, $C=(0,4)$, calcula el ángulo en A y el área del triángulo.
(Respuesta: $90°$ y 6 unidades cuadradas.)

U06-18

¿Tiene sentido calcular el ángulo entre $(0,0)$ y $(1,2)$ con la fórmula del coseno?
(Respuesta: No.)

Resumen del capítulo

El producto escalar es un número; para ángulos usa vectores no nulos y para un vértice toma un origen común.

Capítulo 5

Ecuaciones de la recta

5.1 Punto y vector director

Una recta queda determinada por un punto $P = (p_1, p_2)$ y un vector director $\vec{v} = (v_1, v_2) \neq (0, 0)$. Su ecuación vectorial es $(x, y) = P + t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$, y las paramétricas son $x = p_1 + tv_1$, $y = p_2 + tv_2$. El mismo t debe satisfacer ambas.

5.2 Continua, general y pendiente

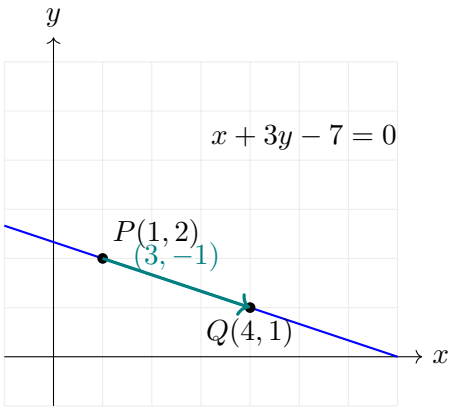
Si v_1, v_2 son no nulos, la continua es $(x - p_1)/v_1 = (y - p_2)/v_2$. Si alguna componente es cero, usa las paramétricas o la ecuación de la coordenada constante: no dividas por cero. La ecuación general es $Ax + By + C = 0$, con $(A, B) \neq (0, 0)$. Un director es $(B, -A)$ y un vector perpendicular es (A, B). Si $B \neq 0$, la explícita es $y = mx + n$, $m = -A/B$, $n = -C/B$. La forma punto-pendiente es $y - p_2 = m(x - p_1)$. Para director de primera componente no nula, $m = v_2/v_1$.

Ejemplo resuelto

Por $P = (1, 2)$ con director $(3, -1)$:

$$(x, y) = (1, 2) + t(3, -1), \quad x = 1 + 3t,\ y = 2 - t;$$

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y - 2}{-1}, \quad x + 3y - 7 = 0, \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}.$$



5.3 Dos puntos y casos especiales

Dados $P \neq Q$, toma director $Q - P$. Para una horizontal $y = b$, director $(1, 0)$ y pendiente 0; para una vertical $x = a$, director $(0, 1)$ y pendiente no definida. No toda recta tiene forma explícita $y = mx + n$.

Ejemplo resuelto

La recta por $(2, -1)$ y $(2, 4)$ es $x = 2$. Puede escribirse $x = 2$, $y = -1 + 5t$; no tiene ecuación continua con dos denominadores no nulos ni pendiente finita.

5.4 Practica y razona

U06-19

Escribe vectorial, paramétricas, continua, general y explícita de la recta por $(1, 2)$ con director $(3, -1)$.
(Respuesta: $(x, y) = (1, 2) + t(3, -1)$; $x = 1 + 3t, y = 2 - t$; $(x - 1)/3 = (y - 2)/(-1)$; $x + 3y - 7 = 0$; $y = -x/3 + 7/3$.)

U06-20

Halla la recta que pasa por $(0, 1)$ y $(2, 5)$. Da un director y su pendiente.
(Respuesta: $y = 2x + 1$; director $(2, 4)$; pendiente 2.)

U06-21

Obtén un director y dos puntos de $2x - y + 3 = 0$.
(Respuesta: Director $(1, 2)$; puntos $(0, 3)$ y $(1, 5)$.)

U06-22

Escribe las rectas horizontal y vertical por $(-2, 3)$. Indica sus pendientes.
(Respuesta: $y = 3$, pendiente 0; $x = -2$, pendiente no definida.)

U06-23

Escribe las paramétricas de la recta por $(2, -1)$ con director $(0, 4)$ y decide si cabe la continua habitual.
(Respuesta: $x = 2$, $y = -1 + 4t$; la continua con dos cocientes no es válida.)

Resumen del capítulo

Elegir una forma válida; todas deben representar los mismos puntos y nunca se divide por una componente cero.

Capítulo 6

Problemas de incidencia

6.1 Pertenencia y alineación

Para saber si un punto pertenece, sustituye sus dos coordenadas en la ecuación. En paramétricas, busca un mismo parámetro para ambas. Tres puntos distintos están alineados si sus vectores desde un mismo origen son paralelos: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ proporcionales. Si $A = B$, trata primero esa coincidencia: dos puntos iguales no determinan una recta única.

Ejemplo resuelto

En $x = 1 + t$, $y = 2 + 2t$, el punto $(3, 5)$ exigiría $t = 2$ por x, pero entonces $y = 6$, no 5. No pertenece. En cambio $(3, 6)$ sí.

6.2 Intersección mediante sistemas

La intersección de dos rectas es el conjunto de puntos que cumple ambas ecuaciones. Resuelve el sistema y comprueba en las dos. Una solución es un cruce; una incompatibilidad indica paralelas distintas y una identidad, la misma recta.

Ejemplo resuelto

$x + y = 5$, $x - y = 1$: sumando $2x = 6$, $x = 3$, $y = 2$. El cruce $(3, 2)$ satisface las dos.

6.3 Interpretar el resultado

Una recta representa un recorrido completo ideal. Si el problema limita a segmentos, comprueba además que el punto de corte está en ambos segmentos. Dos trayectorias pueden cruzarse sin que dos móviles coincidan a la misma hora.

6.4 Practica y razona

U06-24

¿Pertenece $(3, 5)$ a $x = 1 + t$, $y = 2 + 2t$? ¿Y $(3, 6)$?
(Respuesta: No; sí.)

U06-25

Estudia la alineación de $A = (1, 1)$, $B = (3, 5)$ y $C = (4, 7)$.
(Respuesta: Están alineados.)

U06-26

Halla la intersección de $x + y = 5$ y $x - y = 1$.
(Respuesta: $(3, 2)$.)

U06-27

El segmento AB, con $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$, está sobre $y = x$. La recta $x = 2$ la corta en $(2, 2)$. ¿Corta también el segmento?
(Respuesta: No.)

Resumen del capítulo

Sustituir para pertenencia, comparar desplazamientos para alineación y resolver sistemas para intersección.

Capítulo 7

Posición relativa de dos rectas

7.1 Secantes, paralelas y coincidentes

Dos rectas del plano son secantes si tienen un punto común, paralelas distintas si no tienen ninguno, y coincidentes si todos sus puntos son comunes. Para $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, calcula $D = A_1B_2 - A_2B_1$. Si $D \neq 0$, son secantes. Si $D = 0$, resuelve o compara las ecuaciones completas para distinguir paralelas y coincidentes. No uses cocientes con ceros.

Ejemplo resuelto

$2x - y = 1$ y $4x - 2y = 2$ son coincidentes: la segunda es el doble de la primera. Si el segundo término independiente fuera 3, serían paralelas distintas.

7.2 Directores y pendientes

Directores proporcionales indican rectas paralelas o coincidentes, no distinguen ambas opciones. Para distinguirlas, comprueba un punto de una en la otra. Con pendientes finitas distintas, son secantes; iguales, comprueba también el término independiente.

7.3 Perpendicularidad y casos verticales

Dos rectas con directores $\vec{u}, \vec{v}$ son perpendiculares si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Con pendientes finitas, $m_1m_2 = -1$. Una vertical y una horizontal son perpendiculares aunque no pueda hacerse el producto de sus pendientes.

Ejemplo resuelto

$y = 2x + 1$ y $y = -x/2 + 3$ tienen producto de pendientes -1. $x = 2$ y $y = 3$ también son perpendiculares: directores $(0, 1)$ y $(1, 0)$.

7.4 Practica y razona

U06-28

Clasifica $2x - y = 1$ y $4x - 2y = 2$.
(Respuesta: Coincidentes.)

U06-29

Clasifica $x + y = 1$ y $2x + 2y = 5$.
(Respuesta: Paralelas distintas.)

U06-30

Estudia si $y = 3x + 1$ y $y = -x/3 + 2$ son perpendiculares.
(Respuesta: Sí.)

U06-31

Clasifica $x = 2$ e $y = -1$ e indica su intersección.
(Respuesta: Secantes perpendiculares en $(2, -1)$.)

Resumen del capítulo

Directores para dirección, un punto para coincidencia y producto escalar para perpendicularidad, también en verticales.

Capítulo 8

Construcción de rectas con condiciones

8.1 Paralela por un punto

Conserva un director de la recta dada y cambia el punto al que debe pasar. En forma general, si la dada es $Ax + By + C = 0$, una paralela tiene $Ax + By + C' = 0$. Sustituye el punto para hallar C'. Si el punto ya está en la recta, resulta la misma recta.

8.2 Perpendicular por un punto

Si un director es (u, v), uno perpendicular es $(-v, u)$: su producto es cero. En una general, (A, B) es director de una perpendicular. Así puedes resolver casos verticales sin pendientes.

Ejemplo resuelto

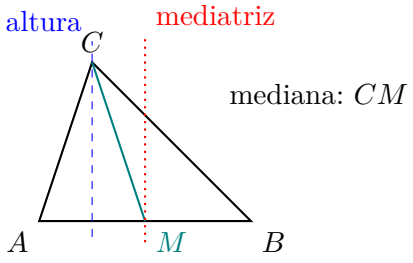
Por $P = (1, -2)$, paralela a $2x - y + 3 = 0$: $2x - y + C' = 0$ y $2 + 2 + C' = 0$, luego $2x - y - 4 = 0$. Perpendicular: director $(2, -1)$, pendiente $-1/2$, $y + 2 = -(x - 1)/2$, o $x + 2y + 3 = 0$.

8.3 Mediatriz, medianas y alturas

La mediatriz pasa por el punto medio de un segmento y es perpendicular a él. Sus puntos equidistan de los extremos. La mediana une un vértice con el punto medio del lado opuesto. La altura pasa por un vértice y es perpendicular a la recta del lado opuesto. No son lo mismo: solo coinciden en ciertos triángulos.

Ejemplo resuelto

Para $A = (0, 0)$ y $B = (4, 0)$, el punto medio es $(2, 0)$ y la mediatriz es $x = 2$. Si el tercer vértice es $C = (1, 3)$, su mediana hacia AB une $(1, 3)$ con $(2, 0)$: $y = -3x + 6$; su altura es la vertical $x = 1$.



8.4 Practica y razona

U06-32

Halla por $(1, -2)$ la paralela y la perpendicular a $2x - y + 3 = 0$.
(Respuesta: $2x - y - 4 = 0$ y $x + 2y + 3 = 0$.)

U06-33

Halla la mediatriz de $A = (0, 0)$, $B = (4, 0)$.
(Respuesta: $x = 2$.)

U06-34

En $A = (0, 0)$, $B = (4, 0)$, $C = (1, 3)$, halla mediana y altura desde C.
(Respuesta: Mediana $y = -3x + 6$; altura $x = 1$.)

U06-35

Halla por $(3, -2)$ una paralela y una perpendicular a $x = 5$.
(Respuesta: Paralela $x = 3$; perpendicular $y = -2$.)

Resumen del capítulo

Paralela: mismo director; perpendicular: director ortogonal; mediatriz: punto medio, mediana: vértice y punto medio.

Capítulo 9

Problemas de geometría analítica

9.1 Clasificar con evidencias

Para un triángulo, compara cuadrados de longitudes antes de extraer raíces: dos iguales indican isósceles; producto escalar cero en un vértice indica rectángulo. Un triángulo puede ser isósceles y rectángulo a la vez. Para un cuadrilátero, respeta el orden de los vértices y comprueba que no sea degenerado; estudia lados opuestos, diagonales y ángulos según lo que quieras demostrar.

Ejemplo resuelto

$A = (0, 0)$, $B = (4, 0)$, $C = (4, 3)$, $D = (0, 3)$ forman un rectángulo: lados opuestos paralelos y consecutivos perpendiculares. Su perímetro es $2(4 + 3) = 14$ y área $4 \cdot 3 = 12$. No es cuadrado, pues $4 \neq 3$.

9.2 Planos y diseño urbano

Elige un origen y fija la escala de los ejes antes de calcular. Un vector de componentes $(3, 4)$ representa 5 unidades de distancia; si cada unidad corresponde a 100 m, son 500 m reales. Una calle ideal se modeliza con una recta; un tramo concreto exige comprobar los límites del segmento.

9.3 Decidir y comunicar

En parejas, plantead dos ubicaciones para un punto de encuentro en un plano sencillo y justificad una condición de equidistancia con una mediatriz. Comparad la distancia en línea recta con un recorrido por calles. La propuesta debe explicar qué condiciones reales no recoge el plano; no se afirma que distancia recta y recorrido urbano coincidan.

9.4 Practica y razona

U06-36

Clasifica el triángulo $A = (0, 0)$, $B = (2, 2)$, $C = (4, 0)$ y calcula perímetro y área.
(Respuesta: Rectángulo isósceles en B; perímetro $4 + 4\sqrt{2}$; área 4.)

U06-37

Clasifica $A = (0, 0)$, $B = (4, 0)$, $C = (4, 3)$, $D = (0, 3)$ y calcula su perímetro.
(Respuesta: Rectángulo no cuadrado; perímetro 14.)

U06-38

En un plano, una unidad equivale a 100 m. Halla la distancia real entre $(1, 1)$ y $(4, 5)$ y compara con un recorrido horizontal seguido de uno vertical.
(Respuesta: Directa 500 m; por los dos tramos 700 m.)

U06-39

Dos accesos están en $(0, 0)$ y $(6, 0)$. Un punto de encuentro debe estar en la calle $y = 2$ y equidistar de ambos. Hállalo.
(Respuesta: $(3, 2)$.)

Resumen del capítulo

Justificar la clasificación con longitudes, paralelismo o perpendicularidad; interpretar la escala y los límites del modelo.

Capítulo 10

Calculadora y GeoGebra

10.1 CASIO: cálculo y comprobación

En Calcular de fx-991SP CW o fx-570SP X II, calcula módulos con raíz de suma de cuadrados y producto escalar con componentes. Escribe paréntesis alrededor de números negativos: $\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$. Para ángulos usa grados y la inversa del coseno; introduce todo el cociente dentro de sus paréntesis. En la CW, HOME y Ecuación permiten elegir un sistema lineal con dos incógnitas. En la X II, MENU y Ecuación/Func permiten elegir simultáneas de dos incógnitas. Introduce coeficientes en el orden $ax+by=c$, transformando previamente las generales; conserva una copia del sistema y sustituye la pareja obtenida en las originales.

10.2 GeoGebra: comprobar sin sustituir la prueba

Introduce puntos con sus coordenadas, construye el vector entre dos puntos y la recta que pasa por ellos. Compara la ecuación mostrada con tu forma general: multiplicar todos los coeficientes por un mismo número no nulo no cambia la recta. Usa las herramientas de intersección, paralela y perpendicular para contrastar tus cálculos. Arrastra un punto en una construcción dependiente: si una perpendicular deja de serlo, quizá se dibujó a ojo. Conserva entradas y resultados y explica qué propiedad comprueba cada herramienta. Las pantallas no sustituyen las igualdades que justifican el resultado.

10.3 Tabla de registro

Para cada caso anota datos, cálculo analítico, comprobación digital y conclusión. Si aparece un cociente ligeramente fuera de $[-1,1]$ por redondeo, revisa la precisión antes de interpretar un error; con datos exactos fuera de ese intervalo, revisa el modelo o el cálculo.

10.4 Practica y razona

U06-40

Indica qué cálculo introducirías para el ángulo entre $(2,1)$ y $(1,3)$ y da el resultado en grados. (Respuesta: $\arccos(5/\sqrt{50})=45°$.)

U06-41

La calculadora devuelve $(3,2)$ para $x+y=5$, $x-y=1$. Describe una comprobación independiente. (Respuesta: Sustituir en ambas: $3+2=5$, $3-2=1$.)

U06-42

GeoGebra muestra $-4x + 2y - 6 = 0$ y tú obtienes $2x - y + 3 = 0$. ¿Son distintas?
(Respuesta: No; son la misma recta.)

Resumen del capítulo

Usar tecnología para contrastar módulos, ángulos e intersecciones, conservando la justificación analítica.

Capítulo 11

Problemas integrados y síntesis

11.1 Elegir la representación

Si conoces un punto y un desplazamiento, empieza con vectorial o paramétricas. Para pendiente e interpretación de crecimiento, usa explícita si no es vertical. Para pertenencia, intersección y paralelas, la general puede ser más directa. Elige por utilidad, no porque una forma sea superior a las demás.

11.2 Comprobar de manera distinta

Un punto calculado por sistemas se comprueba sustituyendo; una perpendicular por pendientes se contrasta con producto escalar; una mediatriz se comprueba con distancias a los extremos. Representar ayuda a detectar errores, pero una figura aproximada no demuestra igualdad exacta.

11.3 Revisión personal

Anota un error inicial, el paso donde lo detectaste y la corrección. En pareja, intercambiad una solución y explicad qué evidencia falta. Revisad especialmente extremo menos origen, componentes cero, mismo parámetro en las dos coordenadas y distinción entre mediana, altura y mediatriz.

11.4 Practica y razona

U06-43

Para $A = (1, 1)$ y $B = (5, 3)$, halla recta AB y mediatriz.
(Respuesta: $x - 2y + 1 = 0$; mediatriz $2x + y - 8 = 0$.)

U06-44

Halla el punto de $x + y = 6$ que equidista de $(0, 0)$ y $(4, 0)$.
(Respuesta: $(2, 4)$.)

U06-45

¿Basta que dos cuadriláteros tengan el mismo perímetro para que sean semejantes? Relaciónalo con U5.
(Respuesta: No.)

Resumen del capítulo

Elegir una ecuación útil y verificar mediante una propiedad independiente.

Formulario y mapa de procedimientos

A.1 Vectores, distancias y punto medio

$$\overrightarrow{AB} = B - A, \quad \vec{u} \pm \vec{v} = (u_1 \pm v_1, u_2 \pm v_2), \quad \lambda\vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2).$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}, \quad d(A,B) = |B - A|, \quad M = \frac{A+B}{2}, \quad B = 2M - A.$$

Vectores libres iguales: mismo desplazamiento. Paralelismo de no nulos: componentes proporcionales, o $u_1v_2 - u_2v_1 = 0$, sin dividir por cero.

A.2 Producto escalar

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta.$$

Para no nulos: producto cero significa perpendicularidad y $\theta = \arccos((\vec{u} \cdot \vec{v})/(|\vec{u}||\vec{v}|))$. Para el ángulo en A, usar $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

A.3 Recta por un punto y un director no nulo

$$(x, y) = (p_1, p_2) + t(v_1, v_2), \qquad x = p_1 + tv_1, \quad y = p_2 + tv_2.$$

Si $v_1v_2 \neq 0$, continua: $(x - p_1)/v_1 = (y - p_2)/v_2$. No usar cocientes con denominador cero.

General: $Ax + By + C = 0$, $(A, B) \neq (0, 0)$. Director $(B, -A)$; perpendicular (A, B). Si $B \neq 0$, explícita $y = mx + n$ con $m = -A/B$, $n = -C/B$. Punto-pendiente: $y - p_2 = m(x - p_1)$. Horizontal $y = b$, pendiente 0; vertical $x = a$, sin pendiente definida.

A.4 Incidencia y construcciones

Pertenencia: sustituir las coordenadas; en paramétricas, el mismo t en ambas. Alineación de tres puntos distintos: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ paralelos. Corte: resolver el sistema y comprobar.

Generales de dos rectas: $D = A_1B_2 - A_2B_1$. Si $D \neq 0$, secantes; si $D = 0$, sistema o comparación completa para distinguir paralelas y coincidentes. Directores proporcionales no bastan para distinguir estas dos últimas.

Paralela por P: mismo director. Perpendicular por P: director $(-v_2, v_1)$. Con pendientes finitas, perpendicularidad $m_1m_2 = -1$; vertical y horizontal se tratan sin esa fórmula.

Mediatriz: punto medio y perpendicular al segmento. Mediana: vértice y punto medio del lado opuesto. Altura: vértice y perpendicular al lado opuesto.

Resumen del capítulo

Distinguir puntos y desplazamientos; elegir ecuación válida; comprobar por sustitución o propiedad independiente; interpretar escala y segmentos del contexto.

Apéndice B

Práctica global

Resuelve con el método acordado, explica cada paso y comprueba tus resultados.

U06-G01

Con $A=(-1,2)$, $B=(3,5)$, calcula vector, distancia, punto medio y recta AB.
(Respuesta: $(4,3)$; 5; $(1,7/2)$; $3x-4y+11=0$.)

U06-G02

Halla el corte de $2x-y=1$ y $x+y=5$ y compruébalo.
(Respuesta: $(2,3)$.)

U06-G03

Por $P=(2,1)$ traza paralela y perpendicular a $x+2y-4=0$.
(Respuesta: $x+2y-4=0$ y $2x-y-3=0$.)

U06-G04

Halla k para que $A=(0,0)$, $B=(2,3)$ y $C=(4,k)$ estén alineados.
(Respuesta: $k=6$.)

U06-G05

Para $\vec{u}=(1,2)$ y $\vec{v}=(2,-1)$ calcula producto escalar, suma y ángulo.
(Respuesta: 0; $(3,1)$; $90°$.)

U06-G06

Clasifica el cuadrilátero $A=(0,0)$, $B=(2,1)$, $C=(1,3)$, $D=(-1,2)$ y calcula perímetro y área.
(Respuesta: Cuadrado; perímetro $4\sqrt{5}$; área 5.)

U06-G07

Para $A=(0,0)$, $B=(6,0)$, $C=(2,4)$, halla altura desde C, mediana desde C y mediatriz de AB.
(Respuesta: $x=2$; $y=-4x+12$; $x=3$.)

U06-G08

Una calle recta pasa por $(0,1)$ y $(4,3)$. Un acceso perpendicular debe pasar por $(2,0)$. Halla el punto de encuentro.
(Respuesta: $(6/5,8/5)$.)

Apéndice C

Autoevaluación de 20 preguntas

Una sola respuesta correcta. Anota tus elecciones y justifica las que te hayan generado dudas. La clave está exclusivamente en el documento docente.

Pregunta 1

Para $A = (1, 2)$, $B = (4, 6)$, $\overrightarrow{AB}$ es:

A) $(5, 8)$

B) $(3, 4)$

C) $(-3, -4)$

D) $(4, 3)$

Pregunta 2

El módulo de $(-3, 4)$ es:

A) -5

B) 7

C) 5

D) 1

Pregunta 3

Vectores equipolentes tienen:

A) Solo igual módulo

B) Solo igual dirección

C) Igual origen siempre

D) Igual módulo, dirección y sentido

Pregunta 4

$(1, 2) + (3, -1)$ es:

A) $(4, 1)$

B) $(2, -3)$

C) $(3, -2)$

D) $(4, 3)$

Pregunta 5

$-2(3,-1)$ es:

A) $(6,-2)$

B) $(-6,2)$

C) $(-6,-2)$

D) $(1,-3)$

Pregunta 6

$(2,3)$ y $(4,6)$ son:

A) Perpendiculares

B) Nulos

C) Paralelos

D) De sentidos opuestos

Pregunta 7

El punto medio entre $(0,2)$ y $(4,6)$ es:

A) $(4,8)$

B) $(2,2)$

C) $(4,4)$

D) $(2,4)$

Pregunta 8

Si $A=(1,1)$ y el punto medio es $(3,2)$, el otro extremo es:

A) $(5,3)$

B) $(2,1)$

C) $(4,3)$

D) $(6,4)$

Pregunta 9

$(1, 2) \cdot (3, 4)$ vale:

A) 7

B) 10

C) 11

D) 14

Pregunta 10

Dos vectores no nulos son perpendiculares si:

A) Su suma es nula

B) Su producto escalar es cero

C) Tienen igual módulo

D) Son proporcionales

Pregunta 11

Un director de $2x + 3y - 1 = 0$ es:

A) $(2, 3)$

B) $(3, 2)$

C) $(2, -3)$

D) $(3, -2)$

Pregunta 12

La pendiente de $y = -2x + 3$ es:

A) -2

B) 3

C) 2

D) -3

Pregunta 13

La recta $x = 4$:

A) Tiene pendiente 0

B) No tiene pendiente definida

C) Es horizontal

D) No es una recta

Pregunta 14

Para $(x, y) = (1, 2) + t(3, -1)$, $t = 2$ da:

A) $(4, 1)$

B) $(6, -2)$

C) $(7, 0)$

D) $(3, 4)$

Pregunta 15

Las rectas $x + y = 1$, $2x + 2y = 2$ son:

A) Secantes

B) Perpendiculares

C) Paralelas distintas

D) Coincidentes

Pregunta 16

Las rectas $y = x$ e $y = x + 1$ son:

A) Paralelas distintas

B) Coincidentes

C) Perpendiculares

D) Secantes

Pregunta 17

Una perpendicular a pendiente 2 tiene pendiente:

A) 2

B) -2

C) $-1/2$

D) $1/2$

Pregunta 18

La mediatriz de un segmento:

A) Une un vértice con el punto medio

B) Pasa por el punto medio y es perpendicular

C) Siempre es horizontal

D) Es la recta del segmento

Pregunta 19

El corte de $x + y = 5$, $x - y = 1$ es:

A) $(2, 3)$

B) $(1, 4)$

C) $(5, 0)$

D) $(3, 2)$

Pregunta 20

Para hallar el ángulo en A del triángulo ABC se usan:

A) $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

B) $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{AC}$

C) Dos vectores nulos

D) Solo longitudes sumadas

Revisión personal

Selecciona dos respuestas y explica el procedimiento. Anota un error detectado y una acción concreta para mejorar. No cambies la respuesta sin explicar qué has revisado.