MATEMÁTICAS B

4.º de Educación Secundaria Obligatoria

Unidad 5

Semejanza y trigonometría

Manual del alumnado

Curso 2026–2027

Edición V01 · Índice cerrado el 30 de octubre de 2026

Índice

1 Figuras semejantes y razón de semejanza **3**
1.1 Correspondencia y escala . . . 3
1.2 Longitudes, superficies y cuerpos . . . 3
1.3 Practica y razona . . . 3

2 Teorema de Tales **5**
2.1 Paralelas y segmentos . . . 5
2.2 Dividir y medir sin acceder . . . 5
2.3 Practica y razona . . . 5

3 Semejanza de triángulos **7**
3.1 Criterios . . . 7
3.2 El triángulo rectángulo y su altura . . . 7
3.3 Practica y razona . . . 7

4 Medida de ángulos **9**
4.1 Grados y radianes . . . 9
4.2 Orientación y vueltas . . . 9
4.3 Lectura de unidades . . . 9
4.4 Practica y razona . . . 9

5 Razones trigonométricas de un ángulo agudo **11**
5.1 Definiciones y semejanza . . . 11
5.2 Valores exactos . . . 11
5.3 Complementarios . . . 11
5.4 Practica y razona . . . 12

6 Resolución de triángulos rectángulos **13**
6.1 Elegir una relación . . . 13
6.2 Elevación, depresión y pendiente . . . 13
6.3 Dos puntos de observación . . . 13
6.4 Practica y razona . . . 14

7 Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera 15
7.1 Circunferencia goniométrica . . . 15
7.2 Signos y ejes . . . 15
7.3 Reducción al primer cuadrante . . . 15
7.4 Practica y razona . . . 16

8 Identidades trigonométricas 17
8.1 Relaciones fundamentales . . . 17
8.2 Calcular razones y elegir el signo . . . 17
8.3 Simplificar y justificar . . . 17
8.4 Practica y razona . . . 17

9 Resolución de triángulos cualesquiera 19
9.1 Notación y elección del teorema . . . 19
9.2 Teorema del seno . . . 19
9.3 Teorema del coseno . . . 19
9.4 Dos lados y un ángulo no comprendido . . . 20
9.5 Área y comprobaciones . . . 20
9.6 Practica y razona . . . 20

10 Calculadora y herramientas digitales 22
10.1 CASIO fx-991SP CW y fx-570SP X II . . . 22
10.2 Cálculo directo e inverso . . . 22
10.3 Explorar con GeoGebra . . . 22
10.4 Registro de trabajo . . . 22
10.5 Practica y razona . . . 22

11 Problemas integrados y síntesis 24
11.1 Un esquema de decisión . . . 24
11.2 Investigar y comunicar . . . 24
11.3 Errores que conviene detectar . . . 24
11.4 Practica y razona . . . 24

A Formulario y mapa de procedimientos 26
A.1 Semejanza y triángulos rectángulos . . . 26
A.2 Ángulos y razones . . . 26
A.3 Triángulos cualesquiera . . . 26

B Práctica global 27

C Autoevaluación de 20 preguntas 28

Capítulo 1

Figuras semejantes y razón de semejanza

1.1 Correspondencia y escala

Dos figuras son semejantes si una puede obtenerse de la otra cambiando su tamaño de manera uniforme, además de trasladarla, girarla o reflejarla. Sus ángulos correspondientes son iguales y sus longitudes correspondientes guardan una misma razón positiva. Antes de calcular, identifica qué vértices y lados se corresponden: no siempre ocupan la misma posición en el dibujo.

Concepto clave

Si pasamos de una figura original a otra semejante, fijamos $k =$ longitud nueva/longitud original. Para $k > 1$ ampliamos; para $0 < k < 1$ reducimos. Al invertir el sentido de la comparación, la razón es $1/k$.

1.2 Longitudes, superficies y cuerpos

Cada longitud, incluido el perímetro, se multiplica por k. Un área se multiplica por k^2 y un volumen por k^3, siempre que las figuras o cuerpos sean semejantes. Un rectángulo que solo aumenta su anchura no conserva la semejanza.

Ejemplo resuelto

Una maqueta a escala $1:200$ representa un edificio de 18 m: convertimos a 1800 cm y obtenemos $1800/200 = 9$ cm. Una superficie de 3 cm^2 en el plano equivale a $3 \cdot 200^2 = 120000$ $\text{cm}^2 = 12$ m^2.

Atención

Compara siempre longitudes en las mismas unidades. Si el área se multiplica por 9, la razón de longitudes es 3; no es 9.

1.3 Practica y razona

U05-01

Dos triángulos semejantes tienen lados correspondientes de 4 y 10 cm. Halla la razón del primero al segundo y la inversa.
(Respuesta: 5/2 y 2/5.)

U05-02

Una figura tiene perímetro 18 cm y área 12 cm^2. Se amplía con $k = 3$. Calcula las nuevas medidas.
(Respuesta: 54 cm y 108 cm^2.)

U05-03

Dos cuerpos semejantes tienen razón de volúmenes 125 : 8. Halla la razón de longitudes y la de áreas en el mismo sentido.
(Respuesta: 5 : 2 y 25 : 4.)

U05-04

En un mapa 1 : 25000, un camino mide 6 cm. ¿Cuál es su longitud real?
(Respuesta: 1,5 km.)

U05-05

¿Son semejantes los rectángulos de 3×5 cm y 6×9 cm?
(Respuesta: No.)

Resumen del capítulo

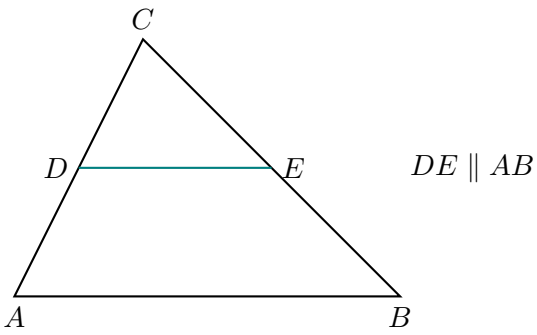
Definir el sentido de la razón; aplicar k a longitudes, su cuadrado a áreas y su cubo a volúmenes.

Capítulo 2

Teorema de Tales

2.1 Paralelas y segmentos

Si varias rectas paralelas cortan a dos secantes, los segmentos correspondientes que determinan son proporcionales. Es esencial comparar segmentos del mismo tipo: tramo con tramo o distancia total con distancia total.



En el dibujo, $CD/CA = CE/CB = DE/AB$. También $CD/DA = CE/EB$. No mezcles CD/CA con CE/EB: un denominador es total y el otro es un tramo.

Ejemplo resuelto

Si $CD = 3$, $DA = 2$ y $CE = 4{,}5$ cm, entonces $CA = 5$ y $3/2 = 4{,}5/EB$; por tanto $EB = 3$ cm. Usando totales, $3/5 = 4{,}5/7{,}5$.

2.2 Dividir y medir sin acceder

Para dividir un segmento AB en cinco partes iguales, dibuja desde A una semirrecta auxiliar, marca cinco pasos iguales, une la quinta marca con B y traza por las otras marcas paralelas a esa unión. Tales garantiza partes iguales en AB. Para dividirlo en razón $2:3$, usa la segunda marca de cinco. Las sombras permiten medir alturas si los rayos solares son paralelos, el suelo es horizontal y las mediciones se realizan al mismo tiempo.

2.3 Practica y razona

U05-06

En el esquema del capítulo, $CD = 4$, $DA = 6$ y $CE = 5$ cm. Halla EB.
(Respuesta: 7,5 cm.)

U05-07

En un triángulo ABC, $D \in CA$, $E \in CB$ y $DE \parallel AB$. Si $CD/CA = 2/5$ y $AB = 15$ cm, halla DE.
(Respuesta: 6 cm.)

U05-08

Divide un segmento de 15 cm en dos partes en razón $2 : 3$. Explica la construcción de Tales.
(Respuesta: 6 cm y 9 cm.)

U05-09

Una vara vertical de 1,5 m proyecta 2 m de sombra y un árbol proyecta 12 m. Halla la altura del árbol bajo las condiciones de Tales.
(Respuesta: 9 m.)

Resumen del capítulo

Dibujar paralelas y correspondencias antes de plantear la proporción; no mezclar tramos y totales.

Capítulo 3

Semejanza de triángulos

3.1 Criterios

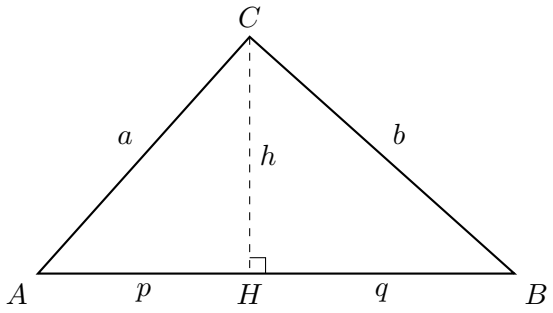
Basta comprobar una de estas condiciones: AA, dos ángulos iguales; LLL, tres pares de lados proporcionales; LAL, dos pares de lados proporcionales y el ángulo comprendido igual. Dos lados proporcionales y un ángulo no comprendido no garantizan semejanza.

3.2 El triángulo rectángulo y su altura

En un triángulo rectángulo, la altura desde el ángulo recto hasta la hipotenusa lo divide en dos triángulos semejantes al original. Si c es la hipotenusa, a, b los catetos, p la proyección de a y q la de b, entonces:

$$c = p + q, \qquad a^2 = cp, \quad b^2 = cq, \qquad h^2 = pq.$$

Son los teoremas del cateto y de la altura. Sumando las dos igualdades de los catetos resulta $a^2 + b^2 = c(p+q) = c^2$: recuperamos Pitágoras. Por el área también $ab = ch$.



Ejemplo resuelto

Si $p = 4$ y $q = 5$ cm, $c = 9$ cm, $a = \sqrt{36} = 6$ cm, $b = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ cm y $h = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ cm. Comprueba que $6^2 + (3\sqrt{5})^2 = 9^2$.

3.3 Practica y razona

U05-10

Dos triángulos tienen ángulos de 40° y 65°. ¿Basta para afirmar que son semejantes?
(Respuesta: Sí, por AA.)

U05-11

Compara triángulos de lados $3, 4, 5$ y $6, 8, 10$ cm.
(Respuesta: Semejantes, razón 2.)

U05-12

Las proyecciones sobre la hipotenusa son 9 y 16 cm. Halla hipotenusa, altura y catetos.
(Respuesta: 25, 12, 15 y 20 cm.)

U05-13

Un cateto mide 6 cm y su proyección sobre la hipotenusa 3,6 cm. Halla hipotenusa y el otro cateto.
(Respuesta: 10 cm y 8 cm.)

Resumen del capítulo

Usar un criterio suficiente de semejanza; asociar cada cateto con su propia proyección.

Capítulo 4

Medida de ángulos

4.1 Grados y radianes

Una vuelta tiene 360°. Un radián es el ángulo central que abarca un arco de longitud igual al radio. Una vuelta tiene 2π rad y media vuelta, π rad:

$$\theta_{\text{rad}} = \theta_{\text{grados}} \frac{\pi}{180}, \qquad \theta_{\text{grados}} = \theta_{\text{rad}} \frac{180}{\pi}.$$

Ejemplo resuelto

$135° = 3\pi/4$ rad y $5\pi/6$ rad $= 150°$. Conserva π en la respuesta exacta.

4.2 Orientación y vueltas

Medimos desde el lado inicial hasta el final: sentido antihorario positivo, horario negativo. Ángulos que difieren en $360°k$ o $2\pi k$, con k entero, tienen el mismo lado final, aunque su medida y el número de vueltas no sean iguales.

Ejemplo resuelto

$750° = 2 \cdot 360° + 30°$; comparte lado final con 30°. Para $-60°$, sumamos una vuelta y obtenemos 300°.

4.3 Lectura de unidades

El símbolo de grado no se escribe después de un valor expresado en radianes. En grados sexagesimales, $1° = 60'$ y $1' = 60''$; por ejemplo $12{,}5° = 12°30'$. No confundir $12{,}30°$ con $12°30'$.

4.4 Practica y razona

U05-14

Convierte 210° a radianes y $7\pi/4$ rad a grados.
(Respuesta: $7\pi/6$ rad y 315°.)

U05-15

Da un ángulo entre 0° y 360°, sin incluir el último, equivalente a $-450°$.
(Respuesta: 270°.)

U05-16

Expresa 22,25° en grados y minutos.
(Respuesta: 22°15′.)

U05-17

¿Tienen 30° y 390° la misma medida? ¿Y el mismo lado final?
(Respuesta: Distinta medida; mismo lado final.)

Resumen del capítulo

Una vuelta: 360 grados o 2 pi radianes; conservar la unidad al convertir y al usar la calculadora.

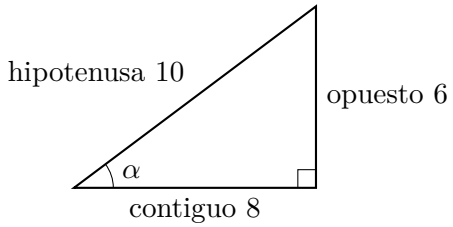
Capítulo 5

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

5.1 Definiciones y semejanza

Respecto de un ángulo agudo α en un triángulo rectángulo, la hipotenusa se opone al ángulo recto, el cateto opuesto queda enfrente de α y el contiguo forma parte de sus lados.

$$\sin\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}, \quad \cos\alpha = \frac{\text{contiguo}}{\text{hipotenusa}}, \quad \tan\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{contiguo}}.$$



Los triángulos rectángulos con el mismo ángulo agudo son semejantes por AA. Por eso los cocientes no dependen del tamaño. En el dibujo $\sin\alpha = 3/5$, $\cos\alpha = 4/5$ y $\tan\alpha = 3/4$.

5.2 Valores exactos

Al dividir un equilátero de lado 2 por su altura aparecen catetos $1, \sqrt{3}$ e hipotenusa 2: se deducen $30°$ y $60°$. Un triángulo rectángulo isósceles con catetos $1, 1$ da hipotenusa $\sqrt{2}$ y el ángulo $45°$.

Ángulo	$30°$	$45°$	$60°$
Seno	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
Coseno	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
Tangente	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$

5.3 Complementarios

Los dos ángulos agudos suman $90°$. Al cambiar de ángulo, los catetos intercambian sus papeles: $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ y $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$. Para ángulos agudos, sus tangentes son recíprocas.

5.4 Practica y razona

U05-18

Un triángulo rectángulo tiene catetos 5 y 12 cm. Halla las tres razones del ángulo opuesto al cateto de 5 cm.
(Respuesta: 5/13, 12/13, 5/12.)

U05-19

Calcula exactamente $\sin 60°$, $\cos 30°$ y $\tan 45°$.
(Respuesta: $\sqrt{3}/2$, $\sqrt{3}/2$, 1.)

U05-20

Si $\sin 28° \approx 0{,}4695$, calcula $\cos 62°$ sin otra operación trigonométrica.
(Respuesta: $\approx 0{,}4695$.)

U05-21

Un compañero calcula seno como hipotenusa dividida entre cateto y obtiene 1,4. Explica el error.
(Respuesta: Ha invertido el cociente.)

Resumen del capítulo

Elegir el ángulo de referencia antes de nombrar los catetos y formar el cociente.

Capítulo 6

Resolución de triángulos rectángulos

6.1 Elegir una relación

Resolver consiste en hallar los lados y ángulos desconocidos. Dibuja y marca datos, identifica el ángulo recto, nombra los lados respecto del ángulo utilizado y escoge una relación que contenga la incógnita y datos conocidos. Con dos lados, usa Pitágoras y una razón inversa; con un lado y un ángulo agudo, usa seno, coseno o tangente. El otro ángulo es $90° - \alpha$.

Ejemplo resuelto

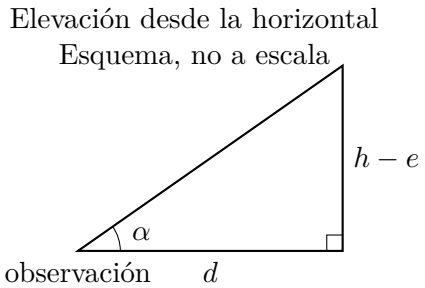
Una escalera de 5 m forma 60° con suelo horizontal. La altura es $5\sin 60° = 5\sqrt{3}/2 \approx 4{,}33$ m y la separación a la pared, $5\cos 60° = 2{,}5$ m.

6.2 Elevación, depresión y pendiente

La elevación se mide hacia arriba desde la horizontal del observador; la depresión, hacia abajo desde esa horizontal. No se miden desde la vertical. Una pendiente del $p\%$ significa $100\,\text{desnivel/distancia horizontal} = p$; por tanto $\tan\alpha = p/100$.

Ejemplo resuelto

Desde 24 m del pie de un edificio se ve su parte superior a 35° con instrumento a 1,5 m del suelo horizontal. Entonces $h = 24\tan 35° + 1{,}5 \approx 18{,}30$ m. La altura del instrumento se añade después.



6.3 Dos puntos de observación

Si se avanza d metros hacia una torre y los ángulos de elevación son α y $\beta > \alpha$, para observaciones a nivel del suelo: $h = (x + d)\tan\alpha = x\tan\beta$. Despeja x, distancia del punto cercano al pie. Si los ojos están a una altura e, las igualdades calculan $h - e$.

Atención

Conserva cifras durante los cálculos y redondea al final. Verifica que la hipotenusa es el mayor lado y que las longitudes y los ángulos tienen sentido.

6.4 Practica y razona

U05-22

Una escalera de 10 m forma 30° con el suelo. Halla altura y separación horizontal.
(Respuesta: 5 m y $5\sqrt{3} \approx 8{,}66$ m.)

U05-23

Los catetos de un triángulo rectángulo miden 6 y 8 cm. Resuélvelo.
(Respuesta: Hipotenusa 10 cm; ángulos 36,87° y 53,13°.)

U05-24

Desde un mirador situado 20 m sobre el nivel del mar se observa una boya con depresión 30°. Halla la distancia horizontal.
(Respuesta: $20\sqrt{3} \approx 34{,}64$ m.)

U05-25

Una rampa salva 0,8 m en 10 m horizontales. Calcula pendiente porcentual y ángulo.
(Respuesta: 8% y 4,57° aproximadamente.)

U05-26

Desde dos puntos de suelo horizontal separados 10 m, alineados con el pie de una torre y situados al mismo lado, se observan ángulos de 30° desde el lejano y 60° desde el cercano. Halla altura y distancia cercana.
(Respuesta: $5\sqrt{3} \approx 8{,}66$ m de altura; 5 m de distancia.)

Resumen del capítulo

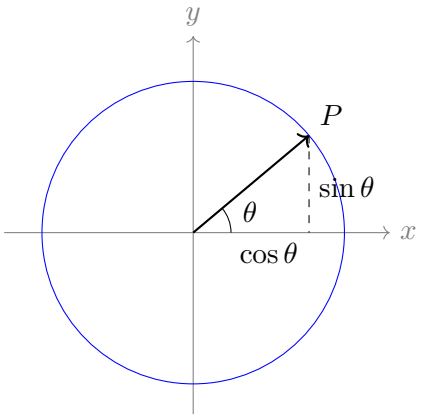
Dibujar, elegir razón, despejar y comprobar; distinguir distancia horizontal de longitud inclinada.

Capítulo 7

Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

7.1 Circunferencia goniométrica

En la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1, el punto final de θ es $P = (\cos\theta, \sin\theta)$. Si $\cos\theta \neq 0$, $\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta$. El seno y el coseno están entre -1 y 1. La tangente no existe en $90° + 180°k$.



7.2 Signos y ejes

Cuadrante	Seno	Coseno	Tangente
I	+	+	+
II	+	−	−
III	−	−	+
IV	−	+	−

En los ejes lee las coordenadas: para $0, 90, 180, 270$ grados, los puntos son $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$. No asignes un signo de cuadrante a un valor cero.

7.3 Reducción al primer cuadrante

Reduce primero a $[0°, 360°)$. Para un ángulo fuera de los ejes, su referencia aguda es θ, $180° - \theta$, $\theta - 180°$ o $360° - \theta$, según esté en I, II, III o IV. Usa las magnitudes de esa referencia y el signo del cuadrante.

Ejemplo resuelto

225° tiene referencia 45° y está en III: $\sin 225° = \cos 225° = -\sqrt{2}/2$, $\tan 225° = 1$. Para $-60°$, la posición es 300°: seno $-\sqrt{3}/2$, coseno $1/2$, tangente $-\sqrt{3}$.

7.4 Practica y razona

U05-27

Calcula exactamente seno, coseno y tangente de 120°.
(Respuesta: $\sqrt{3}/2$, $-1/2$, $-\sqrt{3}$.)

U05-28

Calcula $\sin 330°$ y $\cos 750°$.
(Respuesta: $-1/2$ y $\sqrt{3}/2$.)

U05-29

Indica $\sin 270°$, $\cos 180°$ y si existe $\tan 90°$.
(Respuesta: -1, -1; la tangente no existe.)

U05-30

Si $\sin \alpha = 3/5$ y α está en II, halla coseno y tangente.
(Respuesta: $-4/5$ y $-3/4$.)

Resumen del capítulo

Coordenadas en la circunferencia, referencia aguda y signo del cuadrante; los ejes se estudian aparte.

Capítulo 8

Identidades trigonométricas

8.1 Relaciones fundamentales

Por Pitágoras en la circunferencia unidad, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Además $\tan\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$ si $\cos\alpha \neq 0$. Dividiendo la primera por $\cos^2\alpha$ se obtiene $1+\tan^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$, con la misma restricción. Una identidad es verdadera en todo su dominio común. Comprobarla para un ángulo aislado no la demuestra; encontrar un contraejemplo sí refuta una igualdad que se pretende universal.

8.2 Calcular razones y elegir el signo

Ejemplo resuelto

Si $\cos\alpha = -5/13$ en III, $\sin^2\alpha = 144/169$ y $\sin\alpha = -12/13$. La tangente es $12/5$. La raíz cuadrada positiva por sí sola no decide el signo del seno.

8.3 Simplificar y justificar

Ejemplo resuelto

Para $\cos\alpha \neq 0$, $(1-\sin^2\alpha)/\cos\alpha = \cos^2\alpha/\cos\alpha = \cos\alpha$. La simplificación no hace que la expresión original exista cuando $\cos\alpha = 0$.

Para justificar una identidad, transforma un miembro mediante igualdades válidas hasta llegar al otro. Antes de dividir, declara qué expresiones no pueden ser cero. No se incluyen fórmulas de suma, diferencia o ángulo doble en esta unidad.

Atención

$\sin^2\alpha$ significa $(\sin\alpha)^2$; no es $\sin(\alpha^2)$. Tampoco $\sin\alpha + \cos\alpha = 1$ es una identidad.

8.4 Practica y razona

U05-31

Si $\cos\alpha = 5/13$ y α está en IV, halla seno y tangente.
(Respuesta: $-12/13$ y $-12/5$.)

U05-32

Simplifica $(1-\cos^2\alpha)/\sin\alpha$ e indica su restricción.
(Respuesta: $\sin\alpha$, para $\sin\alpha \neq 0$.)

U05-33

Justifica $1+\tan^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$.
(Respuesta: Verdadera donde $\cos\alpha \neq 0$.)

U05-34

Refuta con un ejemplo que $\sin\alpha + \cos\alpha = 1$ para cualquier ángulo.
(Respuesta: $\alpha = 45°$ da $\sqrt{2} \neq 1$.)

Resumen del capítulo

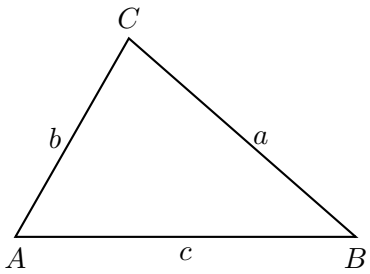
Identidad fundamental y cociente de razones; mantener restricciones y usar el cuadrante para decidir signos.

Capítulo 9

Resolución de triángulos cualesquiera

9.1 Notación y elección del teorema

Los lados a, b, c se oponen a los ángulos A, B, C, respectivamente, con $A+B+C = 180°$. Un triángulo no degenerado tiene lados positivos y cada lado menor que la suma de los otros dos.



9.2 Teorema del seno

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Se obtiene al expresar una misma altura de dos formas: $h = b\sin A = a\sin B$. Es útil con dos ángulos y un lado; calcula antes el tercer ángulo.

Ejemplo resuelto

$A = 40°$, $B = 65°$, $a = 8$ cm. Entonces $C = 75°$, $b = 8\sin 65/\sin 40 \approx 11{,}28$ cm y $c = 8\sin 75/\sin 40 \approx 12{,}02$ cm.

9.3 Teorema del coseno

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Las otras dos expresiones se obtienen cambiando las letras. Se deduce proyectando un lado sobre otro y aplicando Pitágoras; para $A = 90°$ se reduce a este teorema. Úsalo con dos lados y su ángulo comprendido o con tres lados. Para hallar A: $\cos A = (b^2 + c^2 - a^2)/(2bc)$.

Ejemplo resuelto

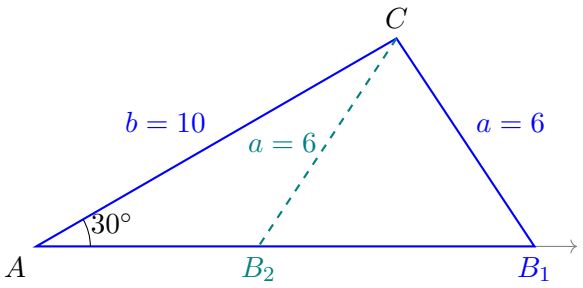
$b = 7$, $c = 9$ cm, $A = 60°$: $a^2 = 49 + 81 - 126 \cdot 1/2 = 67$; $a = \sqrt{67} \approx 8{,}19$ cm. Por coseno, $B \approx 47{,}78°$ y $C = 180° - A - B \approx 72{,}22°$.

9.4 Dos lados y un ángulo no comprendido

Con A, a, b, calcula $q = b \sin A/a$. Si $q > 1$, no existe triángulo. Si $0 < q \leq 1$, comprueba $B_1 = \arcsin q$ y su suplementario $B_2 = 180° - B_1$: solo son válidos los que cumplen $A + B_i < 180°$. Si coinciden, se cuenta una sola solución.

Ejemplo resuelto

$A = 30°$, $a = 6$, $b = 10$ cm da $q = 5/6$. Los valores $B_1 \approx 56{,}44°$, $B_2 \approx 123{,}56°$ son admisibles: $C_1 \approx 93{,}56°$, $C_2 \approx 26{,}44°$. Por el seno, $c_1 \approx 11{,}98$ y $c_2 \approx 5{,}34$ cm. Hay dos triángulos.



9.5 Área y comprobaciones

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C.$$

Usa siempre el ángulo comprendido entre los lados elegidos. Comprueba suma de ángulos, desigualdad triangular y correspondencia: al mayor ángulo se opone el mayor lado. Si redondeas demasiado pronto puedes perder esta coherencia.

9.6 Practica y razona

U05-35

$A = 30°$, $B = 90°$, $a = 5$ cm. Resuelve el triángulo.
(Respuesta: $C = 60°$, $b = 10$ cm, $c = 5\sqrt{3}$ cm.)

U05-36

Dos lados de 5 y 7 cm forman 60°. Halla el tercer lado y el área.
(Respuesta: $\sqrt{39} \approx 6{,}24$ cm; $35\sqrt{3}/4 \approx 15{,}16$ cm^2.)

U05-37

Un triángulo tiene lados $3, 4, 5$ cm. Halla todos sus ángulos.
(Respuesta: 36,87°, 53,13° y 90° aproximadamente.)

U05-38

Con $A = 30°$, $a = 6$, $b = 10$ cm, determina cuántos triángulos existen y sus ángulos restantes.
(Respuesta: Dos: $(B, C) \approx (56{,}44°, 93{,}56°)$ o $(123{,}56°, 26{,}44°)$.)

U05-39

¿Existe un triángulo con $A = 30°$, $a = 2$ y $b = 6$ cm? Justifica.
(Respuesta: No.)

U05-40

En un triángulo, $A = 40°$, $B = 65°$, $a = 8$ cm. Calcula C, b, c.
(Respuesta: 75°; 11,28 cm y 12,02 cm aproximadamente.)

Resumen del capítulo

Elegir seno o coseno según los datos; comprobar el suplementario en el caso ambiguo y validar cada triángulo.

Capítulo 10

Calculadora y herramientas digitales

10.1 CASIO fx-991SP CW y fx-570SP X II

Antes de introducir razones, fija la unidad angular. En la CW, abre CONFIG y selecciona el ajuste de cálculo de Unidad angular: Grado sexag para grados o Radián para radianes. En la X II se accede a la configuración con SHIFT y MENU (CONFIG); elige Unidad angular y grados o radianes. Comprueba el indicador de la pantalla y prueba $\sin 30° = 0{,}5$ en grados o $\sin(\pi/6) = 0{,}5$ en radianes.

10.2 Cálculo directo e inverso

En Calcular de la CW o Calcular de la X II, introduce por ejemplo $24 \tan 35 + 1{,}5$, con paréntesis si hay operaciones compuestas. Para hallar el ángulo de seno 0,6, usa Arcsen en el catálogo de funciones trigonométricas de la CW o SHIFT y seno en la X II. En grados obtendrás 36,869897…; escribe 36,87° si se piden centésimas. La notación $\sin^{-1}$ del teclado significa función inversa, no $1/\sin$. La inversa del seno devuelve el valor principal; el estudio del triángulo decide si hay un suplementario admisible. La calculadora no sustituye la comprobación de los datos.

10.3 Explorar con GeoGebra

Construye un triángulo y una homotecia de razón positiva variable k. Registra razones de lados y áreas para $k = 1/2, 2, 3$ y explica el patrón. Para la circunferencia, dibuja centro $(0, 0)$ y radio 1, un punto móvil P y las proyecciones sobre los ejes: contrasta sus coordenadas con coseno y seno del ángulo orientado. Comprueba la unidad angular que muestra el programa.

10.4 Registro de trabajo

Conserva los datos introducidos, una tabla de resultados y una explicación individual. Una imagen de pantalla sola no justifica un resultado ni demuestra una identidad.

10.5 Practica y razona

U05-41

La calculadora en radianes no devuelve 0,5 al calcular $\sin 30$. Explica cómo corregirlo de dos maneras. (Respuesta: Cambiar a grados o introducir $\pi/6$ en radianes.)

U05-42

Calcula el ángulo agudo cuyo coseno es 0,8. Indica la función y la unidad.
(Respuesta: $\arccos(0{,}8) \approx 36{,}87°$ en DEG.)

U05-43

En GeoGebra, una homotecia con $k = 2$ cambia un área de 7 a 28. ¿Prueba esto la regla para todo k? Explica.
(Respuesta: Confirma el caso; no prueba todos los casos.)

Resumen del capítulo

Comprobar DEG/RAD, distinguir función inversa y recíproco, conservar precisión y justificar la comprobación digital.

Capítulo 11

Problemas integrados y síntesis

11.1 Un esquema de decisión

1. Lee qué se pide y dibuja un esquema con unidades y datos.
2. Si hay paralelas o ángulos iguales, busca Tales o semejanza.
3. En un triángulo rectángulo, elige Pitágoras o razones trigonométricas según los datos.
4. En un triángulo cualquiera, distingue ángulos y lados opuestos y elige seno o coseno.
5. Comprueba existencia, posibles soluciones alternativas, unidades y orden de magnitud.

11.2 Investigar y comunicar

En parejas, elaborad una cronología breve con tres hitos de la trigonometría. Verificad fechas, personas y aportaciones en fuentes identificables; evitad atribuir una invención colectiva a una sola persona. Cada integrante explicará la utilidad de uno de los hitos y su conexión con una medida actual. No se pide memorizar una lista de fechas. Como tarea manipulativa, construid un medidor de ángulos con transportador, hilo y peso; medid una altura accesible con distancia horizontal conocida. No apuntéis al Sol. Comparad dos mediciones, estimad posibles errores y justificad las condiciones del modelo.

11.3 Errores que conviene detectar

No confundir k con k^2; no mezclar lados no correspondientes; no sumar $\sin A + \sin B$ como si fuera $\sin(A + B)$; no elegir un ángulo suplementario sin comprobar el triángulo; no usar una longitud inclinada como distancia horizontal.

11.4 Practica y razona

U05-44

Una torre se representa con 8 cm en una maqueta $1 : 150$. ¿Qué altura real tiene? Si se observa desde 12 m horizontales a nivel del suelo, ¿cuál es el ángulo de elevación?
(Respuesta: 12 m y 45°.)

U05-45

¿Pueden 2, 3 y 6 cm ser los lados de un triángulo? Indica qué comprobación debe preceder al coseno.
(Respuesta: No; $2 + 3 < 6$.)

U05-46

Un alumno usa el teorema del seno con dos lados y un ángulo comprendido. ¿Qué teorema permite obtener directamente el tercer lado?
(Respuesta: El teorema del coseno.)

Resumen del capítulo

La respuesta incluye modelo, procedimiento y comprobación, además de un valor numérico.

Formulario y mapa de procedimientos

A.1 Semejanza y triángulos rectángulos

Razón k = nueva longitud/original. Longitudes y perímetros: factor k; áreas: k^2; volúmenes de cuerpos semejantes: k^3. Convertir unidades antes de formar razones. Tales exige paralelismo y segmentos correspondientes. Criterios de semejanza: AA, LLL y LAL con ángulo comprendido.

Hipotenusa $c = p + q$, proyecciones p, q, catetos correspondientes a, b, altura h:

$$a^2 = cp, \quad b^2 = cq, \quad h^2 = pq, \quad a^2 + b^2 = c^2, \quad ab = ch.$$

A.2 Ángulos y razones

$180^\circ = \pi$ rad. De grados a radianes: multiplicar por $\pi/180$; de radianes a grados: por $180/\pi$. Coterminales: diferencia $360^\circ k$ o $2\pi k$.

$$\sin\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}, \quad \cos\alpha = \frac{\text{contiguo}}{\text{hipotenusa}}, \quad \tan\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{contiguo}}.$$

En la circunferencia unidad, $P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Signos $(\sin, \cos, \tan)$: I $(+,+,+)$; II $(+,-,-)$; III $(-,-,+)$; IV $(-,+,-)$. Los ejes se estudian por sus coordenadas. Tangente no definida si $\cos\alpha = 0$.

	30°	45°	60°
sin	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cos	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
tan	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (\cos\alpha \neq 0).$$

A.3 Triángulos cualesquiera

Lado a opuesto a A, etc.; $A + B + C = 180^\circ$.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \quad S = \frac{1}{2}bc\sin A.$$

Dos ángulos y un lado: seno. Dos lados y ángulo comprendido o tres lados: coseno. Con A, a, b, estudiar $q = b\sin A/a$: si $q > 1$, imposible; si $0 < q \leq 1$, revisar $B = \arcsin q$ y $180^\circ - B$, conservando solo los distintos que cumplan $A + B < 180^\circ$.

Resumen del capítulo

Dibujo y unidades → datos suficientes y compatibles → método → cálculo sin redondeo prematuro → comprobación. Calculadora: verificar DEG/RAD.

Apéndice B

Práctica global

Resuelve con el método acordado, explica cada paso y comprueba tus resultados.

U05-G01

Una maqueta de un depósito tiene volumen 24 cm^3 a escala $1:50$. Halla el volumen real en m^3.
(Respuesta: 3 m^3.)

U05-G02

Una persona de 1,8 m y un poste proyectan sombras de 1,2 y 8 m simultáneamente en terreno horizontal. Halla la altura del poste.
(Respuesta: 12 m.)

U05-G03

En un triángulo rectángulo las proyecciones son 4 y 9 cm. Halla los cuatro elementos c, h, a, b.
(Respuesta: 13, 6, $2\sqrt{13}$ y $3\sqrt{13}$ cm.)

U05-G04

Calcula exactamente $\sin(-150°)$, $\cos 225°$ y $\tan 300°$.
(Respuesta: $-1/2$, $-\sqrt{2}/2$, $-\sqrt{3}$.)

U05-G05

Si $\sin\alpha = -5/13$ y α está en III, calcula coseno y tangente.
(Respuesta: $-12/13$ y $5/12$.)

U05-G06

Desde 20 m horizontales del pie de un edificio se observa su parte superior a $40°$ con ojos a 1,6 m. Halla la altura.
(Respuesta: $\approx 18{,}38$ m.)

U05-G07

Dos caminos de 80 y 100 m salen del mismo punto con ángulo de $60°$. Halla la distancia entre sus extremos y el área del triángulo.
(Respuesta: $20\sqrt{21} \approx 91{,}65$ m; $2000\sqrt{3} \approx 3464{,}10$ m^2.)

U05-G08

En un triángulo, $A = 30°$, $a = 5$ y $b = 8$ cm. Estudia todas las soluciones y halla los lados restantes.
(Respuesta: Dos: $(B, C, c) \approx (53{,}13°, 96{,}87°, 9{,}93$ cm) o $(126{,}87°, 23{,}13°, 3{,}93$ cm).)

Apéndice C

Autoevaluación de 20 preguntas

Una sola respuesta correcta. Anota tus elecciones y justifica las que te hayan generado dudas. La clave está exclusivamente en el documento docente.

Pregunta 1

Una ampliación tiene $k = 3$. El área se multiplica por:

A) 3

B) 6

C) 9

D) 27

Pregunta 2

La razón de volúmenes es 8. La razón de longitudes, en el mismo sentido, es:

A) 2

B) 4

C) 8

D) 64

Pregunta 3

En un plano 1 : 100, 4 cm representan:

A) 4 m

B) 40 m

C) 0,4 m

D) 400 m

Pregunta 4

Para afirmar semejanza de triángulos basta:

A) Un ángulo igual

B) Dos ángulos iguales

C) Un lado igual

D) Dos perímetros iguales

Pregunta 5

Proyecciones 4 y 9 sobre una hipotenusa: la altura vale:

A) 13

B) 36

C) 5

D) 6

Pregunta 6

150° equivale a:

A) $5\pi/6$ rad

B) $3\pi/5$ rad

C) $5\pi/3$ rad

D) $\pi/6$ rad

Pregunta 7

$3\pi/2$ rad equivalen a:

A) 90°

B) 180°

C) 270°

D) 360°

Pregunta 8

El seno de un ángulo agudo es:

A) Contiguo/hipotenusa

B) Opuesto/hipotenusa

C) Hipotenusa/opuesto

D) Opuesto/contiguo

Pregunta 9

$\cos 60°$ vale:

A) $\sqrt{3}/2$

B) $\sqrt{2}/2$

C) 1

D) $1/2$

Pregunta 10

Para hallar una altura con distancia horizontal d y elevación α a nivel del suelo se usa:

A) $h = d\tan\alpha$

B) $h = d/\tan\alpha$

C) $h = d\cos\alpha$

D) $h = d\sin\alpha$

Pregunta 11

En el tercer cuadrante, seno y coseno son:

A) Positivos

B) Seno positivo y coseno negativo

C) Negativos

D) Seno negativo y coseno positivo

Pregunta 12

$\sin 330°$ vale:

A) $1/2$

B) $-1/2$

C) $\sqrt{3}/2$

D) $-\sqrt{3}/2$

Pregunta 13

La tangente de 90°:

A) Es 0

B) Es 1

C) Es -1

D) No está definida

Pregunta 14

La identidad fundamental es:

A) $\sin\alpha + \cos\alpha = 1$

B) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

C) $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 1$

D) $\tan\alpha = \cos\alpha / \sin\alpha$

Pregunta 15

Si $\cos\alpha = -3/5$ en II, su seno es:

A) $-4/5$

B) $3/5$

C) $4/5$

D) $-3/5$

Pregunta 16

Con dos lados y el ángulo comprendido, el tercer lado se obtiene directamente con:

A) Teorema del coseno

B) Teorema de Tales siempre

C) Producto de lados

D) Solo la suma angular

Pregunta 17

Con dos lados y un ángulo no comprendido puede haber:

A) Siempre uno

B) Siempre dos

C) Siempre ninguno

D) Cero, uno o dos triángulos

Pregunta 18

Área con lados 6 y 8 y ángulo comprendido 30°:

A) 24

B) 12

C) 48

D) 6

Pregunta 19

En DEG, arcsin(0,5) devuelve como valor principal:

A) 30°

B) 60°

C) 150°

D) 0,5°

Pregunta 20

Una pendiente del 10% corresponde a:

A) $\alpha = 10°$

B) $\sin\alpha = 0{,}1$

C) $\tan\alpha = 0{,}1$

D) $\cos\alpha = 0{,}1$

Revisión personal

Selecciona dos respuestas y explica el procedimiento. Anota un error detectado y una acción concreta para mejorar. No cambies la respuesta sin explicar qué has revisado.