MATEMÁTICAS B

4.º de Educación Secundaria Obligatoria

Unidad 2

Expresiones algebraicas y fórmulas geométricas

Manual del alumnado

Curso 2026–2027

Edición V02 · Índice cerrado el 30 de octubre de 2026

Índice

1 Lenguaje algebraico y valor numérico **2**
1.1 Traducir, interpretar y restringir . . . 2
1.2 Sustitución y signos . . . 2
1.3 Expresión, identidad y ecuación . . . 2
1.4 Practica y razona . . . 2

2 Patrones y generalización **4**
2.1 De una tabla a una regla . . . 4
2.2 Descomponer un procedimiento . . . 4
2.3 Generalizar y contrastar . . . 4
2.4 Practica y razona . . . 4

3 Monomios, polinomios y operaciones **6**
3.1 Elementos y grado . . . 6
3.2 Sumar, restar y multiplicar . . . 6
3.3 Practica y razona . . . 6

4 Identidades notables **8**
4.1 Tres identidades fundamentales . . . 8
4.2 Aplicación directa e inversa . . . 8
4.3 Comprobar sin confundir verificar y demostrar . . . 8
4.4 Practica y razona . . . 9

5 División de polinomios y regla de Ruffini **10**
5.1 Cociente y resto . . . 10
5.2 Ruffini para divisores de la forma $x - a$ . . . 10
5.3 Practica y razona . . . 10

6 Teoremas del resto y del factor **12**
6.1 Evaluar para conocer un resto . . . 12
6.2 Parámetros sencillos . . . 12
6.3 Practica y razona . . . 12

7 Raíces y factorización **14**
7.1 Factorizar es escribir un producto . . . 14
7.2 Raíces y multiplicidad . . . 14
7.3 Practica y razona . . . 14

8 Monográfico: perímetros, áreas y volúmenes **16**
8.1 Magnitudes y unidades . . . 16
8.2 Cuadrado y rectángulo . . . 16
8.3 Circunferencia y círculo . . . 16
8.4 Triángulo y teorema de Pitágoras . . . 17
8.5 Prismas rectos de base cuadrada y rectangular . . . 17
8.6 Cilindro recto . . . 17
8.7 Cono circular recto . . . 18
8.8 Esfera . . . 18
8.9 Despejar y modelizar . . . 18
8.10 Practica y razona . . . 18

9 Problemas, razonamiento y errores frecuentes **21**
9.1 Del contexto a la expresión . . . 21
9.2 Comprobar razonando . . . 21
9.3 Taller en parejas . . . 21
9.4 Practica y razona . . . 21

10 Calculadora y comprobación tecnológica **23**
10.1 Evaluar sin perder el control algebraico . . . 23
10.2 Valores numéricos y tablas . . . 23
10.3 Comprobar una fórmula geométrica . . . 23
10.4 Registro y límites . . . 23
10.5 Practica y razona . . . 24

A Formulario algebraico y geométrico **25**
A.1 Álgebra . . . 25
A.2 Figuras planas . . . 25
A.3 Cuerpos geométricos . . . 25

B Práctica global **26**

C Autoevaluación de 20 preguntas **28**

Capítulo 1

Lenguaje algebraico y valor numérico

1.1 Traducir, interpretar y restringir

Una variable representa una cantidad que puede cambiar. Una expresión algebraica combina números, variables y operaciones. Antes de operar, explica qué significa cada letra y en qué unidades se mide. Las restricciones pueden proceder de una operación o del contexto.

Ejemplo resuelto

Si un rectángulo tiene lados $x+3$ y $x-1$ cm, su área es $(x+3)(x-1)$ cm^2 y se exige $x>1$. Aunque el polinomio obtenido pueda evaluarse para otros valores, estos no describen el rectángulo del problema.

1.2 Sustitución y signos

Para hallar el valor numérico se sustituye cada variable entre paréntesis cuando es negativa y se respetan las prioridades.

Ejemplo resuelto

Para $P(x)=x^3-4x+1$, $P(-2)=(-2)^3-4(-2)+1=-8+8+1=1$. En $3a^2$, con $a=-2$, resulta $3\cdot 4=12$, no -12.

1.3 Expresión, identidad y ecuación

Una expresión no afirma una igualdad. Una identidad es una igualdad verdadera para todos los valores admisibles, como $2(x+1)=2x+2$. Una ecuación, como $2x+1=7$, pide encontrar los valores que hacen cierta la igualdad. En esta unidad trabajamos expresiones y despejes sencillos; la resolución sistemática de ecuaciones corresponde a U3.

1.4 Practica y razona

U02-01

Expresa el triple de un número disminuido en cinco y el triple de la diferencia entre ese número y cinco.

(Respuesta: $3x-5$; $3(x-5)$.)

U02-02

Calcula $x^3 - 4x + 1$ para $x = -2$.

(Respuesta: 1.)

U02-03

Escribe perímetro y área de un rectángulo de lados $x + 3$ y $x - 1$ cm, con sus restricciones.

(Respuesta: $P = 4x + 4$ cm; $A = x^2 + 2x - 3$ cm^2; $x > 1$.)

U02-04

Distingue: $2x + 3$; $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$; $2x + 3 = 9$.

(Respuesta: Expresión; identidad; ecuación.)

Resumen del capítulo

Nombrar variable y unidades → traducir → indicar restricciones → sustituir con paréntesis.

Capítulo 2

Patrones y generalización

2.1 De una tabla a una regla

Una sucesión es una lista ordenada. Su término general permite calcular una posición n sin escribir todas las anteriores. Para conjeturar una regla, registra varios casos y explica cómo se construye la figura o el número; unos pocos datos no determinan una única sucesión.

Ejemplo resuelto

Una fila de n cuadrados unidos por lados necesita $4 + 3(n-1) = 3n + 1$ palillos. Cada cuadrado nuevo comparte un lado y añade tres. La fórmula está justificada por la construcción, no solo porque coincida para $n = 1, 2, 3$.



$n = 4$: 13 palillos

2.2 Descomponer un procedimiento

Un algoritmo es una secuencia finita de instrucciones para resolver una tarea. Para generar la tabla de palillos: leer n entero positivo; calcular $p = 3n + 1$; mostrar n y p; repetir para la siguiente posición. En una hoja de cálculo, escribe la posición en A2 y la fórmula `=3*A2+1` en B2; al copiarla se actualiza la referencia. Comprueba primero un caso conocido.

2.3 Generalizar y contrastar

Si una conjetura falla, busca un contraejemplo y revisa su alcance. Los números $1, 4, 9, 16$ sugieren n^2 cuando proceden de cuadrados de lado n; la explicación geométrica añade una justificación que una tabla aislada no proporciona.

2.4 Practica y razona

U02-05

Una fila de n cuadrados comparte lados. ¿Cuántos palillos necesita? Calcula para $n = 10$.

(Respuesta: $3n + 1$; 31.)

U02-06

Una sucesión empieza en 5 y aumenta siempre 4. Obtén a_n y a_{20}.

(Respuesta: $a_n = 4n + 1$; 81.)

U02-07

Explica un algoritmo para calcular $P(a)$ si $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Comprueba $a = -2$.

(Respuesta: Leer a; calcular a^2, $2a^2 - 3a + 1$; mostrar resultado. Para -2: 15.)

U02-08

¿Basta comprobar una fórmula para $n = 1, 2, 3$ para demostrar que vale siempre?

(Respuesta: No.)

Resumen del capítulo

Casos → patrón → fórmula → justificación → algoritmo y contraste.

Capítulo 3

Monomios, polinomios y operaciones

3.1 Elementos y grado

Un monomio es un producto de un coeficiente por potencias de variables con exponentes enteros no negativos. Su grado es la suma de esos exponentes. Dos monomios son semejantes cuando tienen la misma parte literal. Un polinomio es una suma de monomios. En una variable, $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, con $a_n \neq 0$, tiene grado n. El polinomio cero no tiene un grado ordinario definido.

Ejemplo resuelto

$-2x^4 + 3x - 7$ tiene grado 4, coeficiente principal -2 y término independiente -7. Ordenado y completo: $-2x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 3x - 7$.

3.2 Sumar, restar y multiplicar

Solo se suman términos semejantes. Al restar un polinomio cambian los signos de todos sus términos. En el producto, cada término de un factor multiplica a todos los del otro.

Ejemplo resuelto

$$(2x^2 - 3x + 1) + (x^2 + 5x - 4) = 3x^2 + 2x - 3,$$
$$(2x^2 - 3x + 1) - (x^2 + 5x - 4) = x^2 - 8x + 5,$$
$$(x^2 - 2x + 1)(x + 3) = x^3 + x^2 - 5x + 3.$$

En el último: $x^3 + 3x^2 - 2x^2 - 6x + x + 3$ y después se reducen términos semejantes.

Atención

En el producto $2x \cdot 3x^2$ se multiplican coeficientes y se suman exponentes: $6x^3$. En la suma $2x + 3x^2$ no se puede reducir más.

3.3 Practica y razona

U02-09

Indica grado, coeficiente principal y término independiente de $-2x^4 + 3x - 7$.

(Respuesta: 4, -2, -7.)

U02-10

Reduce $5x^2 - 3x + 2x^2 + 7x - 1$.

(Respuesta: $7x^2 + 4x - 1$.)

U02-11

Resta $Q = x^2 + 5x - 4$ de $P = 2x^2 - 3x + 1$.

(Respuesta: $x^2 - 8x + 5$.)

U02-12

Multiplica $(x^2 - 2x + 1)(x + 3)$.

(Respuesta: $x^3 + x^2 - 5x + 3$.)

U02-13

Calcula $(2x - 3)(x^2 + x - 2)$.

(Respuesta: $2x^3 - x^2 - 7x + 6$.)

Resumen del capítulo

Ordenar y completar → respetar signos → aplicar distributiva → reducir semejantes.

Capítulo 4

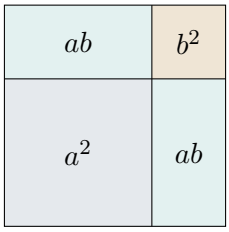
Identidades notables

4.1 Tres identidades fundamentales

Concepto clave

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

El término central del cuadrado procede de los dos productos cruzados. No debe omitirse ni confundirse una diferencia de cuadrados con un cuadrado de diferencia.



4.2 Aplicación directa e inversa

Ejemplo resuelto

$(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2(2x)3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$. En sentido inverso, $9x^2 + 12x + 4 = (3x+2)^2$, porque el término central es $2 \cdot 3x \cdot 2$.

4.3 Comprobar sin confundir verificar y demostrar

Desarrollar por distributiva demuestra una identidad. Sustituir valores permite detectar errores, pero comprobar algunos casos no prueba que la igualdad sea siempre cierta.

Ejemplo resuelto

$x^2 + 4 = (x+2)^2$ es falso: con $x = 1$, los miembros son 5 y 9. El contraejemplo basta para refutar la afirmación universal.

4.4 Practica y razona

U02-14

Desarrolla $(x+5)^2$ y $(3x-2)(3x+2)$.

(Respuesta: $x^2+10x+25$; $9x^2-4$.)

U02-15

Reduce $(2x-1)^2-(x+1)^2$.

(Respuesta: $3x^2-6x$.)

U02-16

Escribe como cuadrado $9x^2+12x+4$.

(Respuesta: $(3x+2)^2$.)

U02-17

Refuta $x^2-4=(x-2)^2$ y escribe la factorización correcta.

(Respuesta: $(x-2)(x+2)$.)

Resumen del capítulo

Dos cuadrados y un doble producto. Suma por diferencia: diferencia de cuadrados. Usar también las reglas al revés.

Capítulo 5

División de polinomios y regla de Ruffini

5.1 Cociente y resto

Si el divisor D es un polinomio no nulo, existen Q y R tales que $P = DQ + R$, con $R = 0$ o $\deg R < \deg D$. La división se comprueba multiplicando divisor por cociente y sumando el resto.

Ejemplo resuelto

Dividimos $2x^3 + 3x^2 - x + 5$ entre $x^2 + 1$. Primero $2x^3/x^2 = 2x$; al restar $(2x)(x^2 + 1)$ queda $3x^2 - 3x + 5$. Después añadimos 3 al cociente y restamos $3x^2 + 3$. Queda $R = -3x + 2$ y $Q = 2x + 3$.

5.2 Ruffini para divisores de la forma $x - a$

Ordena el polinomio e incluye ceros en los grados ausentes. Escribe a, baja el primer coeficiente, multiplica por a, suma y repite. El último número es el resto; los anteriores forman los coeficientes del cociente.

2	1	−4	1	6
		2	−4	−6
	1	−2	−3	0

Así $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x - 2)(x^2 - 2x - 3)$. Si el divisor es $x + 1$, se usa $a = -1$, no 1.

Atención

No se aplica esta tabla directamente a un divisor cuadrático. Si falta un término, su coeficiente cero sigue ocupando su posición.

5.3 Practica y razona

U02-18

Divide $x^3 - 3x^2 + 2x$ entre $x - 1$ y comprueba.

(Respuesta: $Q = x^2 - 2x$, $R = 0$.)

U02-19

Divide $2x^3 + 3x^2 - x + 5$ entre $x^2 + 1$.

(Respuesta: $Q = 2x + 3$, $R = -3x + 2$.)

U02-20

Divide $x^3 + 1$ entre $x + 1$.

(Respuesta: $Q = x^2 - x + 1$, $R = 0$.)

U02-21

En una división, $D = x - 2$, $Q = x^2 + 3$ y $R = 5$. Reconstruye P.

(Respuesta: $x^3 - 2x^2 + 3x - 1$.)

Resumen del capítulo

$P = DQ + R$. Ruffini: divisor $x - a$, coeficientes completos, bajar-multiplicar-sumar y comprobar.

Capítulo 6

Teoremas del resto y del factor

6.1 Evaluar para conocer un resto

Al dividir entre $x-a$, $P(x)=(x-a)Q(x)+R$, con R constante. Sustituir $x=a$ anula el primer sumando: $P(a)=R$.

Concepto clave

Teorema del resto: el resto de dividir $P(x)$ entre $x-a$ es $P(a)$. Teorema del factor: $x-a$ es factor de P si y solo si $P(a)=0$.

Ejemplo resuelto

Para $P(x)=2x^3-x+4$, el resto al dividir entre $x+1$ es $P(-1)=-2+1+4=3$. No necesitamos hacer la división.

6.2 Parámetros sencillos

Ejemplo resuelto

Para que $x-2$ sea factor de x^2+kx-6, debe cumplirse $P(2)=4+2k-6=0$. Así $2k=2$ y $k=1$. La comprobación con $k=1$ da $4+2-6=0$.

Si se da un resto no nulo, se impone $P(a)=R$ en lugar de igualarlo a cero. No confundir raíz del polinomio con coeficiente del divisor: $x+3$ corresponde a $a=-3$.

6.3 Practica y razona

U02-22

Halla el resto de $2x^3-x+4$ entre $x+1$.

(Respuesta: 3.)

U02-23

Halla k para que $x-2$ sea factor de x^2+kx-6.

(Respuesta: $k=1$.)

U02-24

El resto de $x^3 + kx + 1$ al dividir entre $x - 2$ es 5. Calcula k.

(Respuesta: $k = -2$.)

U02-25

¿Es $x + 2$ factor de $x^3 - 4x$? Justifica.

(Respuesta: Sí.)

Resumen del capítulo

Resto al dividir por $x - a$: $P(a)$. Si es cero, a es raíz y $x - a$ es factor.

Capítulo 7

Raíces y factorización

7.1 Factorizar es escribir un producto

Primero busca factor común; después identidades notables; finalmente raíces sencillas y Ruffini. Para polinomios con coeficientes enteros, las raíces enteras posibles dividen al término independiente cuando este no es cero. Son candidatas: hay que comprobarlas.

Ejemplo resuelto

$$x^3 - 5x^2 + 6x = x(x^2 - 5x + 6) = x(x-2)(x-3),$$
$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = x^2(x+1) - 4(x+1) = (x+1)(x-2)(x+2).$$

7.2 Raíces y multiplicidad

Una raíz a corresponde al factor $x-a$. Si se repite, aparece una potencia de ese factor. Un polinomio de grado n no nulo no tiene más de n raíces reales distintas. No todos los factores se pueden descomponer en factores lineales reales: $x^2 + 4 > 0$ para todo real.

Ejemplo resuelto

$x^3 - 4x^2 + x + 6$ tiene raíz 2. Ruffini deja $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$. Por tanto las raíces son 2, 3 y -1.

Atención

En esta unidad no se trabajan fracciones algebraicas. Las divisiones polinómicas se usan para encontrar cociente y resto o para factorizar; no introducen un bloque de operaciones con fracciones algebraicas.

7.3 Practica y razona

U02-26

Factoriza $x^3 - 5x^2 + 6x$ y da sus raíces.

(Respuesta: $x(x-2)(x-3)$; $0, 2, 3$.)

U02-27

Factoriza $4x^2 - 25$ y $x^3 + x^2 - 4x - 4$.

(Respuesta: $(2x-5)(2x+5)$; $(x+1)(x-2)(x+2)$.)

U02-28

Factoriza $x^3 - 4x^2 + x + 6$.

(Respuesta: $(x-2)(x-3)(x+1)$.)

U02-29

Factoriza $x^3 - 2x^2 + x$ y explica por qué $x^2 + 4$ no tiene raíces reales.

(Respuesta: $x(x-1)^2$; $x^2 + 4 \geq 4 > 0$.)

Resumen del capítulo

Factor común → identidad → raíz y Ruffini → factores finales → comprobar.

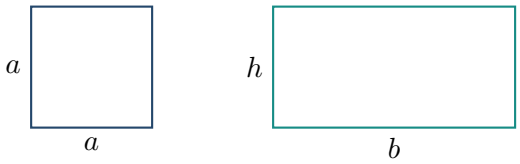
Capítulo 8

Monográfico: perímetros, áreas y volúmenes

8.1 Magnitudes y unidades

El perímetro mide el contorno (cm, m); el área mide superficie (cm^2, m^2) y el volumen mide espacio (cm^3, m^3). Convertir 1 m a 100 cm implica 1 m^2 = 10000 cm^2 y 1 m^3 = 1000000 cm^3. Las figuras son esquemas, no dibujos a escala.

8.2 Cuadrado y rectángulo

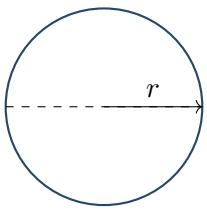


Cuadrado: $P = 4a$, $A = a^2$. Rectángulo: $P = 2(b + h)$, $A = bh$, con todas las longitudes positivas.

Ejemplo resuelto

Un rectángulo de base $x + 3$ y altura $x - 1$ tiene $A = x^2 + 2x - 3$ y $P = 4x + 4$, para $x > 1$. Con $x = 5$ cm, sus lados son 8 y 4 cm: $A = 32$ cm^2, $P = 24$ cm.

8.3 Circunferencia y círculo



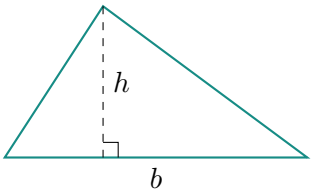
$d = 2r$

Longitud de la circunferencia: $L = 2\pi r = \pi d$. Área del círculo: $A = \pi r^2$. El diámetro no puede sustituir al radio en πr^2.

Ejemplo resuelto

Para $r = 3$ cm: $L = 6\pi$ cm y $A = 9\pi$ cm^2. Se conserva π hasta la aproximación final.

8.4 Triángulo y teorema de Pitágoras



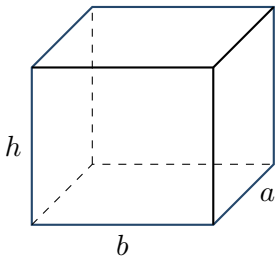
$P = a + b + c$ y $A = bh/2$, donde h es perpendicular a la base elegida. En un triángulo rectángulo, si c es la hipotenusa y a, b los catetos: $c^2 = a^2 + b^2$. Para hallar un cateto, $a = \sqrt{c^2 - b^2}$.

Ejemplo resuelto

En un triángulo isósceles de lados $5, 5, 6$ cm, la altura sobre la base de 6 divide esta en dos segmentos de 3. Por Pitágoras, $h = \sqrt{25 - 9} = 4$ cm. Área $6 \cdot 4/2 = 12$ cm^2 y perímetro 16 cm.

8.5 Prismas rectos de base cuadrada y rectangular

Para un prisma recto: $A_L = P_b h$, $A_T = 2A_b + A_L$, $V = A_b h$. La base y la altura del prisma son perpendiculares.

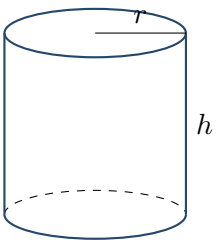


Base cuadrada de lado a: $A_L = 4ah$, $A_T = 2a^2 + 4ah$, $V = a^2 h$. Base rectangular $a \times b$: $A_L = 2(a+b)h$, $A_T = 2ab + 2(a + b)h$, $V = abh$.

Ejemplo resuelto

Un prisma rectangular $3 \times 4 \times 5$ cm tiene $V = 60$ cm^3, $A_L = 2(3+4)5 = 70$ cm^2 y $A_T = 24+70 = 94$ cm^2.

8.6 Cilindro recto

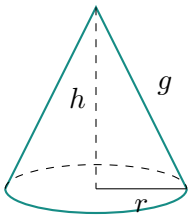


$A_L = 2\pi rh$, $A_T = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, $V = \pi r^2 h$. El área total anterior corresponde a un cilindro cerrado con sus dos bases.

Ejemplo resuelto

Si $r = 2$ cm y $h = 5$ cm: $V = 20\pi$ cm^3, $A_L = 20\pi$ cm^2 y $A_T = 28\pi$ cm^2. Una lata sin tapa tendría solo una base: 24π cm^2.

8.7 Cono circular recto

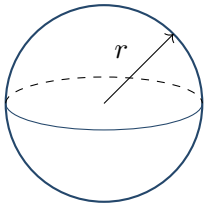


La generatriz $g = \sqrt{r^2 + h^2}$ se obtiene por Pitágoras. $A_L = \pi rg$, $A_T = \pi rg + \pi r^2$ y $V = \pi r^2 h/3$. Altura y generatriz no son intercambiables.

Ejemplo resuelto

Para $r = 3$ cm y $h = 4$ cm: $g = 5$ cm; $A_L = 15\pi$ cm^2, $A_T = 24\pi$ cm^2 y $V = 12\pi$ cm^3.

8.8 Esfera



Superficie: $A = 4\pi r^2$. Volumen: $V = 4\pi r^3/3$. Una esfera no tiene base ni área lateral diferenciada.

Ejemplo resuelto

Para radio 3 cm: $A = 36\pi$ cm^2 y $V = 36\pi$ cm^3. Coinciden los coeficientes numéricos en este ejemplo, pero son magnitudes y unidades distintas.

8.9 Despejar y modelizar

En $A = bh/2$, $h = 2A/b$ para $b > 0$. En $V = \pi r^2 h$, $h = V/(\pi r^2)$. El cociente aparece al despejar una fórmula, sin introducir operaciones con fracciones algebraicas. Si todas las longitudes se multiplican por $k > 0$, el área se multiplica por k^2 y el volumen por k^3.

8.10 Practica y razona

U02-30

Un cuadrado tiene lado $x + 2$ cm. Da perímetro y área desarrollados, y evalúa en $x = 3$.

(Respuesta: $P = 4x + 8$, $A = x^2 + 4x + 4$; 20 cm y 25 cm^2.)

U02-31

Un círculo tiene diámetro 10 cm. Halla longitud y área exactas.

(Respuesta: 10π cm y 25π cm^2.)

U02-32

Un triángulo rectángulo tiene catetos 6 y 8 cm. Halla hipotenusa, perímetro y área.

(Respuesta: 10 cm, 24 cm y 24 cm^2.)

U02-33

Un triángulo isósceles tiene lados $5, 5, 6$ cm. Calcula altura, área y perímetro.

(Respuesta: 4 cm, 12 cm^2, 16 cm.)

U02-34

Un prisma recto de base cuadrada tiene lado 3 cm y altura 7 cm. Calcula áreas lateral y total y volumen.

(Respuesta: 84 cm^2, 102 cm^2, 63 cm^3.)

U02-35

Un prisma rectangular mide $3 \times 4 \times 5$ cm, tomando 3×4 como base. Calcula A_L, A_T, V.

(Respuesta: 70 cm^2, 94 cm^2, 60 cm^3.)

U02-36

Un cilindro cerrado tiene radio 2 cm y altura 5 cm. Halla A_L, A_T, V.

(Respuesta: 20π cm^2, 28π cm^2, 20π cm^3.)

U02-37

Un cono recto tiene radio 3 cm y altura 4 cm. Halla generatriz, área total y volumen.

(Respuesta: 5 cm; 24π cm^2; 12π cm^3.)

U02-38

Una esfera tiene radio 3 cm. Calcula superficie y volumen; después explica qué ocurre al duplicar el radio.

(Respuesta: 36π cm^2 y 36π cm^3; se multiplican por 4 y por 8.)

U02-39

Un cilindro tiene volumen 72π cm^3 y radio 3 cm. Despeja y calcula la altura.

(Respuesta: $h = 8$ cm.)

U02-40

Un prisma de base cuadrada tiene lado x y altura $x+2$. Expresa y desarrolla volumen y área total.

(Respuesta: $V = x^3 + 2x^2$; $A_T = 6x^2 + 8x$; $x > 0$.)

U02-41

Un envase cilíndrico sin tapa tiene radio 3 cm y altura 10 cm. ¿Cuánta superficie de material requiere, sin solapas ni espesor?

(Respuesta: 69π cm^2.)

Resumen del capítulo

Figura → medidas y unidades → fórmula → expresión algebraica → resultado e interpretación.

Capítulo 9

Problemas, razonamiento y errores frecuentes

9.1 Del contexto a la expresión

Haz un esquema, define la variable, indica sus unidades y escribe restricciones antes de desarrollar. Una expresión factorizada puede mostrar mejor el significado de cada medida; una desarrollada puede facilitar comparaciones. Son formas equivalentes, no modelos distintos.

Ejemplo resuelto

Un jardín rectangular tiene lados x y $30 - x$ m porque su perímetro es 60 m. Su área es $A(x) = x(30 - x) = 30x - x^2$, con $0 < x < 30$. La restricción impide que un lado sea cero o negativo.

9.2 Comprobar razonando

Una identidad se justifica con reglas algebraicas; un modelo, además, debe corresponder al dibujo y al contexto. Si la altura de un cilindro es $12 - 2r$, el volumen es $V(r) = \pi r^2(12 - 2r)$ y se exige $0 < r < 6$.

9.3 Taller en parejas

Una persona propone una solución y la otra verifica signos, unidades y restricciones. Intercambiad roles. Seleccionad un error, describid por qué ocurrió y corregidlo con una regla o contraejemplo. La colaboración se observa con evidencias del trabajo, no se deduce de la nota de un examen.

9.4 Practica y razona

U02-42

Un rectángulo tiene perímetro 60 cm y lado x. Da el área desarrollada y el dominio geométrico.

(Respuesta: $30x - x^2$, $0 < x < 30$.)

U02-43

Un cilindro tiene radio r y altura $12 - 2r$. Escribe su volumen desarrollado y restricciones.

(Respuesta: $12\pi r^2 - 2\pi r^3$, $0 < r < 6$.)

U02-44

Un estudiante escribe $(x + 3)^2 = x^2 + 9$. Corrige y aporta un contraejemplo.

(Respuesta: $x^2 + 6x + 9$.)

U02-45

Una empresa modeliza ingresos por $I(x) = 15x$ y costes por $C(x) = x^2 + 3x + 20$ euros. Expresa y factoriza el beneficio.

(Respuesta: $B(x) = -x^2 + 12x - 20 = -(x - 2)(x - 10)$.)

Resumen del capítulo

Modelo factorizado y desarrollado: dos formas de la misma relación. Revisar signos, unidades y restricciones.

Capítulo 10

Calculadora y comprobación tecnológica

10.1 Evaluar sin perder el control algebraico

La fx-991SP CW y la fx-570SP X II son calculadoras científicas, no sistemas de álgebra simbólica. Una tabla numérica ayuda a contrastar una expresión, pero no desarrolla ni demuestra identidades por sí misma.

10.2 Valores numéricos y tablas

Para $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, escribe toda la expresión en Calcular sustituyendo cada x por el número entre paréntesis. Para estudiar varios valores, usa la aplicación Tabla: HOME en CW o MENU en X II. Introduce $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ y el intervalo desde -1 hasta 3 con paso 1, siguiendo los campos de la pantalla.

x	-1	0	1	2	3
$P(x)$	0	6	4	0	0

Los ceros observados sugieren raíces; la factorización y la sustitución exacta las justifican. La tabla con ese paso no descarta raíces entre los valores mostrados.

10.3 Comprobar una fórmula geométrica

Para un cono de radio 3 y altura 4, calcula primero $g = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Después usa $A_T = \pi \cdot 3 \cdot 5 + \pi \cdot 3^2 = 24\pi$. No sustituyas g por h. Mantén π y transforma a decimal solo al final.

10.4 Registro y límites

Anota el cálculo a mano, la entrada, la salida y qué permite concluir. Las instrucciones básicas se contrastan con las guías oficiales de ambos modelos; no se han ensayado en hardware físico. En actividades sin calculadora, la comprobación posterior no reemplaza el procedimiento solicitado.

10.5 Practica y razona

U02-46

Calcula $P(-1), P(0), P(1), P(2), P(3)$ para $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ y contrasta con una tabla.

(Respuesta: $0, 6, 4, 0, 0$.)

U02-47

Calcula exactamente y en decimal el área total de un cono con $r = 3$ cm y $h = 4$ cm.

(Respuesta: $24\pi \approx 75{,}398$ cm^2.)

Resumen del capítulo

Tabla para explorar; álgebra para justificar. Conservar valores exactos y comprobar el significado de las medidas.

Formulario algebraico y geométrico

A.1 Álgebra

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

División: $P = DQ+R$; $R = 0$ o $\deg R < \deg D$. Resto al dividir por $x-a$: $P(a)$. Factor: $x-a \mid P \iff P(a) = 0$. Ruffini requiere divisor $x - a$ y coeficientes completos.

Factorización: factor común, identidades, agrupación y raíces comprobadas. Una tabla de valores apoya una exploración, pero no demuestra identidades generales.

A.2 Figuras planas

Figura	Perímetro o longitud	Área
Cuadrado, lado a	$4a$	a^2
Rectángulo, lados b, h	$2(b+h)$	bh
Circunferencia/círculo	$2\pi r = \pi d$	πr^2, $d = 2r$
Triángulo, lados a, b, c	$a+b+c$	$bh/2$, $h \perp b$

Pitágoras, solo en triángulos rectángulos: $c^2 = a^2 + b^2$, con c hipotenusa. Cateto: $a = \sqrt{c^2 - b^2}$.

A.3 Cuerpos geométricos

Cuerpo	Área lateral	Área total	Volumen
Prisma recto, base A_b, P_b	$P_b h$	$2A_b + P_b h$	$A_b h$
Prisma base cuadrada a	$4ah$	$2a^2 + 4ah$	$a^2 h$
Prisma base rectangular a, b	$2(a+b)h$	$2ab + 2(a+b)h$	abh
Cilindro recto cerrado	$2\pi rh$	$2\pi r^2 + 2\pi rh$	$\pi r^2 h$
Cono recto	πrg	$\pi rg + \pi r^2$	$\pi r^2 h/3$
Esfera	No se separa	$4\pi r^2$	$4\pi r^3/3$

En el cono, $g = \sqrt{r^2 + h^2}$. Las áreas totales de prismas y cilindros incluyen las dos bases; si el objeto está abierto, cuenta solo las superficies presentes.

Perímetro en unidades de longitud; área en unidades cuadradas; volumen en cúbicas. Al escalar longitudes por k, las áreas cambian por k^2 y los volúmenes por k^3.

Resumen del capítulo

Dibujo ⟶ letras y medidas ⟶ fórmula con condiciones ⟶ expresión equivalente ⟶ resultado con unidades.

Apéndice B

Práctica global

Resuelve dejando constancia del procedimiento y revisa el significado de cada respuesta.

U02-G01

Reduce $3(x-2)-2(2x+1)$.

(Respuesta: $-x-8$.)

U02-G02

Desarrolla y factoriza el resultado de $(x+4)^2-16$.

(Respuesta: $x^2+8x=x(x+8)$.)

U02-G03

Calcula el resto de x^4-2x+3 entre $x+1$.

(Respuesta: 6.)

U02-G04

Factoriza $2x^3-8x$.

(Respuesta: $2x(x-2)(x+2)$.)

U02-G05

Un rectángulo mide $x+4$ por x cm. Expresa perímetro y área; calcula para $x=6$.

(Respuesta: $P=4x+8$, $A=x^2+4x$; 32 cm y 60 cm^2.)

U02-G06

Un triángulo rectángulo tiene hipotenusa 13 cm y un cateto de 5 cm. Calcula el otro cateto y el área.

(Respuesta: 12 cm; 30 cm^2.)

U02-G07

Compara los volúmenes de un cilindro y un cono de radio 3 cm y altura 4 cm.

(Respuesta: 36π y 12π cm^3; razón 3.)

U02-G08

Una esfera de radio 2 cm se compara con otra de radio 4 cm. Calcula superficies y volúmenes exactos.

(Respuesta: 16π, 64π cm^2; $32\pi/3$, $256\pi/3$ cm^3.)

Apéndice C

Autoevaluación de 20 preguntas

Una sola respuesta correcta. Anota tus elecciones y justifica las que te hayan generado dudas. La clave está exclusivamente en el documento docente.

Pregunta 1

El grado de $-2x^4 + 3x - 7$ es:

A) 4

B) -2

C) 3

D) 7

Pregunta 2

Para $P(x) = x^3 - 4x + 1$, $P(-2)$ vale:

A) -15

B) 1

C) -1

D) 17

Pregunta 3

El cuadrado $(x + 3)^2$ es:

A) $x^2 + 9$

B) $x^2 + 3x + 9$

C) $x^2 + 6x + 9$

D) $x^2 + 6$

Pregunta 4

$(3x - 2)(3x + 2)$ vale:

A) $9x^2 + 4$

B) $9x^2 - 12x + 4$

C) $3x^2 - 4$

D) $9x^2 - 4$

Pregunta 5

Para dividir por $x + 2$ mediante Ruffini se usa:

A) -2

B) 2

C) 0

D) $1/2$

Pregunta 6

El resto al dividir P por $x - 3$ es:

A) $P(-3)$

B) $P(3)$

C) $3P(x)$

D) $P(0)$

Pregunta 7

$x - 2$ es factor de P si:

A) $P(0) = 2$

B) $P(-2) = 0$

C) $P(2) = 0$

D) $P(2) = 2$

Pregunta 8

$x^2 - 9$ se factoriza:

A) $(x - 3)^2$

B) $(x + 3)^2$

C) $(x - 9)(x + 1)$

D) $(x - 3)(x + 3)$

Pregunta 9

El área de un triángulo de base b y altura perpendicular h es:

A) $bh/2$

B) bh

C) $2(b+h)$

D) $b+h$

Pregunta 10

Un círculo de diámetro 10 tiene área:

A) 100π

B) 25π

C) 10π

D) 5π

Pregunta 11

En un triángulo rectángulo de catetos 6 y 8, la hipotenusa es:

A) 14

B) 2

C) 10

D) $\sqrt{28}$

Pregunta 12

El volumen de un prisma rectangular es:

A) $2(ab+ah+bh)$

B) $abh/3$

C) $ab+h$

D) abh

Pregunta 13

El área lateral de un cilindro recto es:

A) $2\pi rh$

B) $\pi r^2 h$

C) $2\pi r^2$

D) $4\pi r^2$

Pregunta 14

La generatriz de un cono recto satisface:

A) $g = r + h$

B) $g^2 = r^2 + h^2$

C) $g^2 = r^2 - h^2$

D) $g = rh$

Pregunta 15

El volumen de un cono recto es:

A) $\pi r^2 h$

B) $2\pi rh$

C) $\pi r^2 h/3$

D) $4\pi r^3/3$

Pregunta 16

La superficie de una esfera es:

A) πr^2

B) $2\pi r^2$

C) $4\pi r^3/3$

D) $4\pi r^2$

Pregunta 17

Al duplicar todas las longitudes de un cuerpo, su volumen se multiplica por:

A) 8

B) 4

C) 2

D) 6

Pregunta 18

La fila de n cuadrados unidos por lados necesita:

A) $4n$

B) $3n + 1$

C) $n + 3$

D) $2n + 2$

Pregunta 19

Comprobar una igualdad para tres valores:

A) La demuestra siempre

B) La refuta siempre

C) No basta para demostrarla

D) Obliga a que sea falsa

Pregunta 20

Un cilindro sin tapa requiere:

A) Lateral y dos bases

B) Solo lateral

C) Solo una base

D) Lateral y una base

Revisión personal

Selecciona dos respuestas y explica el procedimiento. Anota un error detectado y una acción concreta para mejorar. No cambies la respuesta sin explicar qué has revisado.