MATEMÁTICAS B

4.º de Educación Secundaria Obligatoria

Unidad 1

Números reales

Manual del alumnado

Curso 2026–2027

Edición V02 · Índice cerrado el 30 de octubre de 2026

Índice

1 Conjuntos numéricos y expresiones decimales **2**
1.1 De los números naturales a los reales . . . 2
1.2 Fracción generatriz . . . 2
1.3 Por qué una raíz puede ser irracional . . . 2
1.4 Practica y razona . . . 3

2 Orden, intervalos y valor absoluto **4**
2.1 Comparar y representar conjuntos . . . 4
2.2 Valor absoluto como distancia . . . 4
2.3 Practica y razona . . . 5

3 Potencias y notación científica **6**
3.1 Reglas y condiciones . . . 6
3.2 Notación científica . . . 6
3.3 Practica y razona . . . 6

4 Radicales y racionalización **8**
4.1 Raíces y operaciones . . . 8
4.2 Extraer e introducir factores . . . 8
4.3 Eliminar raíces del denominador . . . 8
4.4 Practica y razona . . . 9

5 Logaritmos **10**
5.1 Una pregunta sobre exponentes . . . 10
5.2 Propiedades . . . 10
5.3 Cambio de base y aplicaciones sencillas . . . 10
5.4 Practica y razona . . . 11

6 Aproximaciones, errores y proporcionalidad **12**
6.1 Precisión y estimaciones . . . 12
6.2 Proporcionalidad . . . 12
6.3 Porcentajes sucesivos . . . 12
6.4 Practica y razona . . . 13

7 Aplicaciones: bacterias, usuarios y escalas logarítmicas **14**
7.1 Elegir un modelo y sus unidades . . . 14
7.2 Disminución y semivida . . . 14
7.3 pH: una escala inversa . . . 14
7.4 Nivel sonoro: intensidad y decibelios . . . 15
7.5 Magnitud sísmica: amplitud y energía . . . 15
7.6 Practica y razona . . . 15

8 Números, proporciones y cultura **17**
8.1 Tres irracionales con interpretación geométrica . . . 17
8.2 Investigar sin atribuir proporciones sin pruebas . . . 17
8.3 Actividad cooperativa . . . 17
8.4 Practica y razona . . . 18

9 Calculadora: CASIO fx-991SP CW y fx-570SP X II **19**
9.1 Preparar una comprobación fiable . . . 19
9.2 Cuatro comprobaciones guiadas . . . 19
9.3 Antes de aceptar un resultado . . . 19
9.4 Práctica autónoma y registro . . . 19
9.5 Practica y razona . . . 20

A Formulario y mapa de la unidad **21**

B Práctica global **22**

C Autoevaluación de 20 preguntas **24**

Capítulo 1

Conjuntos numéricos y expresiones decimales

1.1 De los números naturales a los reales

Los naturales sirven para contar; aquí tomamos $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Los enteros añaden los negativos. Los racionales son cocientes p/q de enteros con $q \neq 0$. Los irracionales no admiten esa escritura. Juntos forman los reales:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \qquad \mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Concepto clave

Un decimal exacto o periódico es racional. Un decimal infinito no periódico es irracional. Que una calculadora muestre pocos decimales no convierte un irracional en racional.

Ejemplo resuelto

$\sqrt{49} = 7$ es natural; -7 es entero; $0{,}125 = 1/8$ es racional; $\sqrt{5}$ es irracional. Un mismo número puede pertenecer a varios conjuntos: se pide el menor cuando se desea una clasificación única.

1.2 Fracción generatriz

En un decimal exacto se escribe el número sin coma y se divide por una potencia de diez; después se simplifica. Para uno periódico, desplazamos la coma y restamos para eliminar el periodo.

Ejemplo resuelto

Si $x = 0{,}\overline{27}$, entonces $100x = 27{,}\overline{27}$. Restando: $99x = 27$ y $x = 3/11$. Si $y = 1{,}2\overline{3}$, $100y - 10y = 123{,}\overline{3} - 12{,}\overline{3} = 111$, de donde $y = 111/90 = 37/30$.

1.3 Por qué una raíz puede ser irracional

Si $\sqrt{2} = p/q$ fuera irreducible, $p^2 = 2q^2$ obligaría a que p fuese par. Al escribir $p = 2k$, resulta $q^2 = 2k^2$, de modo que q también sería par. Contradice que la fracción fuera irreducible. No toda raíz es irracional: las raíces de cuadrados perfectos son enteras.

1.4 Practica y razona

U01-01

Clasifica en el menor conjunto: -8, $\sqrt{36}$, $-7/3$, $\sqrt{11}$.

(Respuesta: $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}$.)

U01-02

Obtén la fracción generatriz de $0{,}\overline{27}$.

(Respuesta: $3/11$.)

U01-03

Obtén las fracciones de $0{,}125$ y $1{,}2\overline{3}$.

(Respuesta: $1/8$ y $37/30$.)

U01-04

¿Puede la suma de dos irracionales ser racional? Da un ejemplo.

(Respuesta: Sí.)

U01-05

Justifica si $\sqrt{18}/\sqrt{2}$ es racional.

(Respuesta: Sí: 3.)

Resumen del capítulo

Clasificar → reconocer el decimal → expresar exactamente → justificar.

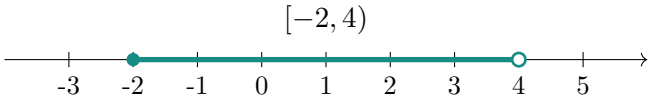
Capítulo 2

Orden, intervalos y valor absoluto

2.1 Comparar y representar conjuntos

Al sumar la misma cantidad a ambos miembros se conserva una desigualdad. Al multiplicar o dividir por un número negativo se invierte. Los intervalos describen conjuntos de números, no solo sus extremos.

Notación	Condición	Extremos
(a, b)	$a < x < b$	Ambos excluidos
$[a, b]$	$a \leq x \leq b$	Ambos incluidos
$[a, b)$	$a \leq x < b$	Solo a incluido
$(-\infty, b]$	$x \leq b$	Infinito siempre abierto



$A \cap B$ conserva los elementos comunes y $A \cup B$ reúne los de ambos conjuntos.

Ejemplo resuelto

$[-4, 2] \cap (0, 5) = (0, 2]$: el cero queda excluido por el segundo conjunto y el dos pertenece a ambos.

2.2 Valor absoluto como distancia

$|x|$ es la distancia de x al cero: vale x si $x \geq 0$ y $-x$ si $x < 0$. La distancia entre a y b es $|a - b|$.

Ejemplo resuelto

$|x - 3| = 2$ describe los puntos a distancia 2 de 3: $x = 1$ o $x = 5$. Para $r > 0$, $|x - a| < r$ equivale a $a - r < x < a + r$.

Atención

No confundir $\sqrt{x^2} = |x|$ con $\sqrt{x^2} = x$: para $x = -3$, la raíz vale 3. No se exige aquí construir geométricamente irracionales.

2.3 Practica y razona

U01-06

Escribe como intervalo $-3 < x \leq 7$.

(Respuesta: $(-3, 7]$.)

U01-07

Halla $[-4, 2] \cap (0, 5)$ y $(-\infty, 1] \cup (1, 4]$.

(Respuesta: $(0, 2]$ y $(-\infty, 4]$.)

U01-08

Resuelve $|2x - 5| = 7$.

(Respuesta: $x = 6$ o $x = -1$.)

U01-09

Expresa $|x - 2| < 3$ como intervalo y calcula la distancia entre -4 y 2.

(Respuesta: $(-1, 5)$; distancia 6.)

U01-10

Ordena $-\sqrt{5}$, -2, 0 y $\sqrt{3}$ sin usar todos sus decimales.

(Respuesta: $-\sqrt{5} < -2 < 0 < \sqrt{3}$.)

Resumen del capítulo

Intervalo: extremos y pertenencia. Intersección: común. Unión: cualquiera. Valor absoluto: distancia.

Capítulo 3

Potencias y notación científica

3.1 Reglas y condiciones

Para base no nula y exponentes enteros:

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a^0 = 1.$$

Un exponente negativo indica un inverso, no un cambio de signo. Para $a > 0$, $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ con $q > 0$.

Ejemplo resuelto

$(-2)^4 = 16$ pero $-2^4 = -16$. En $\dfrac{(2^3)^2 2^{-4}}{2}$ queda $2^{6-4-1} = 2$. Además $27^{2/3} = (\sqrt[3]{27})^2 = 9$.

3.2 Notación científica

Se escribe $a \cdot 10^n$, con $1 \le |a| < 10$ y n entero. Permite comparar órdenes de magnitud y operar con cantidades muy grandes o muy pequeñas.

Ejemplo resuelto

$0{,}000072 = 7{,}2 \cdot 10^{-5}$. El producto $(3 \cdot 10^5)(4 \cdot 10^{-3}) = 12 \cdot 10^2 = 1{,}2 \cdot 10^3$. Para sumar hay que expresar antes con la misma potencia de diez: $3 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 = 3{,}4 \cdot 10^5$.

Atención

En calculadora, introducir $3 \cdot 10^5$ con la tecla de potencia de diez no exige multiplicar por diez otra vez. Comprueba siempre el exponente mostrado.

3.3 Practica y razona

U01-11

Simplifica $3^5 \cdot 3^{-2}/3$.

(Respuesta: 9.)

U01-12

Calcula $(-2)^4$, -2^4 y $16^{3/4}$.

(Respuesta: 16, -16 y 8.)

U01-13

Escribe en notación científica 7200000 y 0,000045.

(Respuesta: $7{,}2 \cdot 10^{6}$ y $4{,}5 \cdot 10^{-5}$.)

U01-14

Calcula $(6 \cdot 10^{7})/(2 \cdot 10^{3})$ y $3 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-5}$.

(Respuesta: $3 \cdot 10^{4}$ y $3{,}5 \cdot 10^{-4}$.)

U01-15

Una célula mide $2 \cdot 10^{-6}$ m. ¿Cuánto medirían 500 alineadas sin huecos?

(Respuesta: 10^{-3} m, es decir 1 mm.)

Resumen del capítulo

Misma base: sumar o restar exponentes. Potencia de potencia: multiplicarlos. Científica: normalizar el coeficiente.

Capítulo 4

Radicales y racionalización

4.1 Raíces y operaciones

La raíz de índice par de $a \geq 0$ es el número no negativo cuya potencia da a. Las de índice impar existen para cualquier real. Para $a, b \geq 0$, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$; en un cociente se exige además $b > 0$.

Ejemplo resuelto

$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$. En cambio $\sqrt{18} + \sqrt{8} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$: solo se suman radicales semejantes. $\sqrt{12}\sqrt{3} = \sqrt{36} = 6$.

4.2 Extraer e introducir factores

Si $a \geq 0$, $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$. Si el factor es negativo, el signo queda fuera. Para extraer, buscamos potencias perfectas del índice: $\sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2}$.

4.3 Eliminar raíces del denominador

Racionalizar consiste en escribir una fracción equivalente con denominador sin radicales. Se multiplica numerador y denominador por el mismo factor no nulo.

Ejemplo resuelto

$\dfrac{5}{\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$. Si el denominador es una diferencia, usamos el conjugado:

$$\frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \frac{\sqrt{5} + 2}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)} = \sqrt{5} + 2.$$

El denominador se transforma con $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Atención

$\sqrt{a + b}$ no se separa en una suma de raíces. Por ejemplo, $\sqrt{9 + 16} = 5$, mientras que $3 + 4 = 7$.

4.4 Practica y razona

U01-16

Simplifica $\sqrt{200} - \sqrt{50}$.

(Respuesta: $5\sqrt{2}$.)

U01-17

Calcula $\sqrt[3]{-64}$ y simplifica $\sqrt{48} + \sqrt{75}$.

(Respuesta: -4 y $9\sqrt{3}$.)

U01-18

Racionaliza $3/(2\sqrt{5})$.

(Respuesta: $3\sqrt{5}/10$.)

U01-19

Racionaliza $2/(\sqrt{3}+1)$ y $1/(\sqrt{7}-\sqrt{6})$.

(Respuesta: $\sqrt{3}-1$ y $\sqrt{7}+\sqrt{6}$.)

U01-20

¿Son iguales $\sqrt{x^2}$ y x para $x=-5$? Introduce $3\sqrt{2}$ en una raíz.

(Respuesta: No: $5 \neq -5$; $\sqrt{18}$.)

Resumen del capítulo

Extraer potencias perfectas → reducir radicales semejantes → operar → racionalizar si procede.

Capítulo 5

Logaritmos

5.1 Una pregunta sobre exponentes

Concepto clave

$\log_a b = x \iff a^x = b$, con $a > 0$, $a \neq 1$ y $b > 0$. El logaritmo decimal tiene base 10 y se escribe $\log b$. El natural tiene base e y se escribe $\ln b$.

Ejemplo resuelto

$\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$; $\log_{10} 0{,}01 = -2$ porque $10^{-2} = 0{,}01$. Para cualquier base admitida, $\log_a 1 = 0$ y $\log_a a = 1$.

5.2 Propiedades

Para $u, v > 0$ y base admitida:

$$\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v, \quad \log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v, \quad \log_a(u^r) = r \log_a u.$$

Si $u = a^p$ y $v = a^q$, entonces $uv = a^{p+q}$; por eso el logaritmo del producto es $p + q$. Las reglas del cociente y de la potencia proceden de las correspondientes reglas de potencias.

Ejemplo resuelto

Con $x, y > 0$, $\log(x^3/y) = 3\log x - \log y$. No existe una regla parecida para $\log(x + y)$.

5.3 Cambio de base y aplicaciones sencillas

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a} = \frac{\log b}{\log a}.$$

Ejemplo resuelto

Para $5^x = 12$, aplicamos logaritmos: $x \log 5 = \log 12$ y $x = \log 12 / \log 5 \approx 1{,}544$. Para $\log_2(x-1) = 3$, primero exigimos $x > 1$, después $x - 1 = 8$, y resulta $x = 9$.

Atención

No existen logaritmos reales de cero o de números negativos. Un resultado de calculadora no sustituye la comprobación de las condiciones iniciales.

5.4 Practica y razona

U01-21

Calcula $\log_2 32$, $\log_3(1/9)$ y $\log_5 1$.

(Respuesta: 5, -2, 0.)

U01-22

Expande $\log(x^3/y)$ con $x, y > 0$.

(Respuesta: $3\log x - \log y$.)

U01-23

Resuelve $3^x = 7$ y expresa el resultado con tres decimales.

(Respuesta: $x = \log 7/\log 3 \approx 1{,}771$.)

U01-24

Resuelve $\log_2(x-1) = 4$.

(Respuesta: $x = 17$.)

U01-25

Refuta $\log(2+3) = \log 2 + \log 3$.

(Respuesta: La derecha es $\log 6$, no $\log 5$.)

Resumen del capítulo

Logaritmo ↔ exponente. Revisar base y argumento → aplicar propiedades → interpretar.

Capítulo 6

Aproximaciones, errores y proporcionalidad

6.1 Precisión y estimaciones

Truncar es eliminar cifras desde una posición; redondear consiste en elegir la aproximación más cercana con la precisión fijada. Si la cifra siguiente es 5 o mayor, aumentamos una unidad la última conservada en números positivos.

$$E_a = |v - \widetilde{v}|, \qquad E_r = \frac{|v - \widetilde{v}|}{|v|} \quad (v \neq 0).$$

E_a tiene las unidades de la magnitud; E_r es adimensional y puede expresarse como porcentaje. Si se redondea a centésimas, el error absoluto es como máximo 0,005 unidades.

Ejemplo resuelto

Aproximar $\sqrt{2}$ por 1,41 produce $E_a \approx 0{,}004214$ y $E_r \approx 0{,}00298 = 0{,}298\%$. El error real se obtiene usando más precisión que la aproximación evaluada.

6.2 Proporcionalidad

En proporcionalidad directa el cociente y/x es constante: $y = kx$. En proporcionalidad inversa lo es el producto: $xy = k$. No toda relación creciente es proporcional.

Ejemplo resuelto

Si 3 kg cuestan 7,50 euros al mismo precio, 5 kg cuestan $(7{,}50/3)5 = 12{,}50$ euros. Si 4 máquinas iguales terminan en 6 h, 8 máquinas terminarían en 3 h, suponiendo reparto perfecto del trabajo.

6.3 Porcentajes sucesivos

Un aumento del $r\%$ multiplica por $1 + r/100$; una reducción, por $1 - r/100$. Los factores sucesivos se multiplican.

Ejemplo resuelto

Subir un 20% y bajar después un 20% multiplica por $1{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}96$: el descenso neto es del 4%. No se introduce interés compuesto financiero.

6.4 Practica y razona

U01-26

Trunca y redondea 3,14159 a centésimas. Acota el error del redondeo.

(Respuesta: 3,14 en ambos casos; $E_a \leq 0{,}005$.)

U01-27

Una longitud exacta de 80 cm se aproxima por 79 cm. Calcula sus errores.

(Respuesta: $E_a = 1$ cm; $E_r = 1{,}25\%$.)

U01-28

Cuatro cuadernos cuestan 10 euros. ¿Cuánto cuestan siete al mismo precio?

(Respuesta: 17,50 euros.)

U01-29

Seis trabajadores tardan 8 días. ¿Cuánto tardarían cuatro con el mismo rendimiento ideal?

(Respuesta: 12 días.)

U01-30

Un precio sube un 10% y baja luego un 10%. ¿Vuelve al inicial?

(Respuesta: No: queda un 1% por debajo.)

Resumen del capítulo

Estimar → fijar precisión → calcular → acotar error. Proporcionalidad: cociente o producto constante.

Capítulo 7

Aplicaciones: bacterias, usuarios y escalas logarítmicas

7.1 Elegir un modelo y sus unidades

Si una cantidad inicial N_0 aumenta una proporción r por periodo, $N(t) = N_0(1+r)^t$. Si se duplica cada T unidades de tiempo: $N(t) = N_0 2^{t/T}$. Son modelos idealizados: el crecimiento indefinido de bacterias o usuarios no es realista. Se aplican durante el intervalo considerado.

Ejemplo resuelto

Una aplicación parte de 1200 usuarios y crece un 15% mensual. Tras 4 meses se esperan $1200(1{,}15)^4 \approx 2099$ usuarios. Para superar 3000:

$$t > \frac{\log(3000/1200)}{\log 1{,}15} \approx 6{,}556.$$

Si solo registramos finales de mes, ocurre por primera vez en el mes 7. La igualdad marca el instante umbral del modelo interpolado.

7.2 Disminución y semivida

$M(t) = M_0(1-r)^t$ modeliza una reducción proporcional constante. Una semivida T conduce a $M(t) = M_0(1/2)^{t/T}$.

Ejemplo resuelto

De 120 g con semivida 8 días, a los 24 días quedan $120(1/2)^3 = 15$ g. Para alcanzar 20 g, $t = 8\log(1/6)/\log(1/2) \approx 20{,}68$ días.

7.3 pH: una escala inversa

En el modelo escolar, $\mathrm{pH} = -\log[H^+]$, usando el valor numérico de la concentración en mol/L. Se recupera la concentración con $[H^+] = 10^{-\mathrm{pH}}$.

Ejemplo resuelto

Una muestra con $[H^+] = 2 \cdot 10^{-4}$ tiene pH $\approx 3{,}699$. Una muestra de pH 3 tiene cien veces la concentración de otra de pH 5. Comparar concentración no permite describir por sí solo todos los efectos de una sustancia.

7.4 Nivel sonoro: intensidad y decibelios

El nivel de intensidad sonora es $L = 10\log(I/I_0)$ dB, con $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 en estos ejercicios. Para comparar fuentes:

$$L_2 - L_1 = 10\log\frac{I_2}{I_1}, \qquad \frac{I_2}{I_1} = 10^{(L_2-L_1)/10}.$$

Ejemplo resuelto

Entre 40 y 60 dB hay 20 dB de diferencia: la razón de intensidades es $10^2 = 100$. No significa que una persona perciba el sonido cien veces más fuerte. Para fuentes independientes de intensidades sumables, se suman intensidades, no decibelios.

7.5 Magnitud sísmica: amplitud y energía

Usamos la relación escolar simplificada de magnitud local $M = \log(A/A_0)$, con amplitud de referencia fijada para la misma corrección de distancia y condiciones comparables. Entonces $A_2/A_1 = 10^{M_2-M_1}$. La escala local de Richter no es la única escala usada para terremotos.

Ejemplo resuelto

Una diferencia de magnitud 2 representa una razón de amplitudes 100. Si el ejercicio proporciona además la aproximación energética $E_2/E_1 \approx 10^{1{,}5(M_2-M_1)}$, la razón de energías es 1000. Son dos magnitudes físicas diferentes.

7.6 Practica y razona

U01-31

Una colonia de 500 bacterias se duplica cada 6 h. Escribe el modelo, calcula $N(12)$ y el tiempo para alcanzar 4000.

(Respuesta: $500 \cdot 2^{t/6}$; 2000; 18 h.)

U01-32

Una población de 200 bacterias crece un 25% por hora. Calcula la cantidad tras 4 h y el primer registro horario que supera 1000.

(Respuesta: ≈ 488; a las 8 h.)

U01-33

Una plataforma tiene 1200 usuarios y crece un 15% mensual. Calcula $U(4)$ y el primer mes con más de 3000.

(Respuesta: ≈ 2099; mes 7.)

U01-34

Un servicio pierde un 10% de sus 1000 usuarios cada mes. ¿En qué primer mes habrá menos de 500?

(Respuesta: Mes 7.)

U01-35

Una sustancia de 96 g tiene semivida 4 años. ¿Cuándo quedan 12 g?

(Respuesta: 12 años.)

U01-36

Calcula el pH de $[H^+] = 2 \cdot 10^{-4}$ mol/L. Compara las concentraciones de muestras con pH 3 y 5.

(Respuesta: $\approx 3{,}699$; la de pH 3 tiene concentración 100 veces mayor.)

U01-37

Un sonido tiene $I = 10^{-6}$ W/m^2. Calcula su nivel y compáralo con uno de 40 dB.

(Respuesta: 60 dB; intensidad 100 veces mayor.)

U01-38

Dos fuentes independientes tienen cada una 50 dB. Si sus intensidades se suman, calcula el nivel total.

(Respuesta: $\approx 53{,}01$ dB.)

U01-39

Compara un sismo de magnitud 6,2 con otro de 4,7. Usa las fórmulas escolares del capítulo para amplitud y energía.

(Respuesta: Amplitud $\approx 31{,}62$; energía $\approx 177{,}83$ veces.)

U01-40

¿Qué aumento de nivel corresponde a multiplicar la intensidad sonora por 5? ¿Y qué diferencia de magnitud sísmica corresponde a multiplicar la amplitud por 5?

(Respuesta: $\approx 6{,}99$ dB; $\approx 0{,}699$.)

Resumen del capítulo

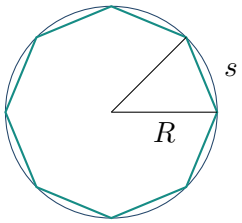
Factor de crecimiento → modelo → logaritmo para despejar tiempo. Escala logarítmica: diferencias ↔ cocientes.

Capítulo 8

Números, proporciones y cultura

8.1 Tres irracionales con interpretación geométrica

π es la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. La proporción áurea es $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1{,}618$ y cumple $\varphi^2 = \varphi + 1$. La proporción cordobesa se expresa como $c = 1/\sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 1{,}307$. En un octógono regular es la razón entre el radio de su circunferencia circunscrita y el lado. Puede obtenerse dividiendo el octógono en ocho triángulos isósceles de ángulo central 45°.



8.2 Investigar sin atribuir proporciones sin pruebas

Que una fachada se parezca a un rectángulo áureo no demuestra que su autor lo diseñara así. Hay que documentar medidas, fuentes, margen de error y fecha. Diferenciar una coincidencia geométrica de una afirmación histórica es parte del razonamiento matemático.

Ejemplo resuelto

Un rectángulo mide 13 cm por 10 cm: su razón es 1,3, próxima a c pero alejada de φ. Esa comparación numérica no permite afirmar nada sobre la intención del diseñador.

8.3 Actividad cooperativa

En parejas, buscad un ejemplo documentado de matemática vinculada al patrimonio andaluz. Elaborad una ficha con fuente, medidas si están disponibles, cálculo y límites de la conclusión. Incluid una aportación de una matemática y repartid las funciones de búsqueda y comprobación. Revisad mutuamente los cálculos y registrad una mejora tras la revisión.

8.4 Practica y razona

U01-41

Comprueba algebraicamente que $\varphi^2 = \varphi + 1$.

(Respuesta: Ambos miembros son $(3+\sqrt{5})/2$.)

U01-42

Un rectángulo mide 13 por 10 cm. Compara su razón con $c \approx 1{,}306563$.

(Respuesta: Razón 1,3; diferencia $\approx 0{,}006563$.)

Resumen del capítulo

Medir y calcular $\neq$ demostrar una intención histórica. Documentar fuentes, incertidumbre y contribuciones diversas.

Capítulo 9

Calculadora: CASIO fx-991SP CW y fx-570SP X II

9.1 Preparar una comprobación fiable

Trabajaremos con entrada natural cuando esté disponible. En la CW se accede a Calcular desde HOME; en la X II, desde MENU. La CW convierte a decimal desde FORMAT; la X II permite alternar con S↔D. Elegid salida exacta antes de aproximar. Los nombres de teclas identifican funciones; no son capturas de una pantalla física.

9.2 Cuatro comprobaciones guiadas

1. Escribe la expresión completa $(\sqrt{72}-\sqrt{8})/2$, respetando todo el numerador. El resultado exacto es $2\sqrt{2}$ y su decimal 2,828427 . . ..

2. Introduce $(-2)^4$ y después $-(2^4)$. Deben aparecer 16 y -16. Usa la tecla de signo negativo cuando introduzcas un número negativo.

3. Para $\log_3 7$, calcula $\log(7)/\log(3)$: 1,771243 . . .. El cociente permite trabajar con ambos modelos sin depender de una plantilla de base variable.

4. Para $1200(1{,}15)^t = 3000$, calcula $\log(3000/1200)/\log(1{,}15)$. Conserva el resultado completo hasta decidir el primer mes entero: 7.

9.3 Antes de aceptar un resultado

Comprueba signos, paréntesis, argumento del logaritmo, exponente y unidades. Usa el valor almacenado del resultado anterior cuando continúes un cálculo, en vez de copiar sus primeras cifras. Un error de dominio no se arregla cambiando a decimal. No se necesita modo complejo para estas unidades.

9.4 Práctica autónoma y registro

Resuelve primero a mano los ejercicios instrumentales; después contrasta. En problemas, deja escrito el modelo antes de teclear. Registra expresión introducida, salida exacta o aproximada y una interpretación. Las rutas básicas se han contrastado con documentación oficial; no se han probado en hardware físico.

9.5 Practica y razona

U01-43

Calcula $(\sqrt{72} - \sqrt{8})/2$ a mano y comprueba con ambos formatos.

(Respuesta: $2\sqrt{2} \approx 2{,}828427$.)

U01-44

Un estudiante obtiene 3 al calcular $\log(1000)$. ¿Qué obtiene para $\log(0{,}001)$ y por qué?

(Respuesta: -3.)

Resumen del capítulo

Expresión escrita → entrada fiel → salida exacta → aproximación final → comprobación del contexto.

Apéndice A

Formulario y mapa de la unidad

Concepto clave

Conjuntos y distancia. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. $d(a,b) = |a-b|$ y $\sqrt{x^2} = |x|$.

Potencias: $a^m a^n = a^{m+n}$, $a^m/a^n = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$ y $a^{-n} = 1/a^n$, respetando bases no nulas donde proceda. Para $a > 0$, $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$.

Radicales: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ para $a, b \geq 0$. Conjugados: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Logaritmos: $\log_a b = x \iff a^x = b$, con $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$. Para $u, v > 0$:

$$\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v, \quad \log_a(u/v) = \log_a u - \log_a v, \quad \log_a(u^r) = r \log_a u, \quad \log_a b = \frac{\log b}{\log a}.$$

Errores: $E_a = |v - \tilde{v}|$, $E_r = E_a/|v|$ si $v \neq 0$; porcentaje $100E_r$.

Proporcionalidad: directa $y = kx$; inversa $xy = k$. Cambio del $r\%$: factor $1 \pm r/100$.

Modelos: $N(t) = N_0(1+r)^t$ para aumento de proporción r; disminución $N_0(1-r)^t$ con $0 < r < 1$; duplicación $N_0 2^{t/T}$; semivida $M_0(1/2)^{t/T}$. Igualar al objetivo y despejar con logaritmos; interpretar si el tiempo se registra en periodos enteros.

Escala	Relación escolar
pH	$\mathrm{pH} = -\log[H^+]$; concentración numérica en mol/L.
Nivel sonoro	$L = 10\log(I/I_0)$; $I_2/I_1 = 10^{\Delta L/10}$, $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2.
Magnitud local	$A_2/A_1 = 10^{\Delta M}$ en condiciones comparables; energía aproximada $E_2/E_1 \approx 10^{1{,}5\Delta M}$.

Resumen del capítulo

Número exacto ⟶ representación y operaciones ⟶ modelo ⟶ cálculo ⟶ precisión y significado.

Apéndice B

Práctica global

Resuelve dejando constancia del procedimiento y revisa el significado de cada respuesta.

U01-G01

Calcula $[0,4) \cup [3,7]$ y $[0,4) \cap [3,7]$.

(Respuesta: $[0,7]$ y $[3,4)$.)

U01-G02

Simplifica $\sqrt{98} - \sqrt{32} + \sqrt{8}$.

(Respuesta: $5\sqrt{2}$.)

U01-G03

Racionaliza $4/(\sqrt{5}+1)$ y comprueba su aproximación decimal.

(Respuesta: $\sqrt{5}-1 \approx 1{,}2361$.)

U01-G04

Una colonia de 300 bacterias aumenta un 20% cada hora. Calcula la cantidad tras 3 horas y cuándo se triplica según el modelo.

(Respuesta: $518{,}4 \approx 518$; $t \approx 6{,}026$ h.)

U01-G05

Una sustancia tiene 80 g y semivida 5 años. Calcula cuándo quedan 10 g y qué masa queda a los 10 años.

(Respuesta: 15 años; 20 g.)

U01-G06

Dos muestras tienen pH 4,5 y 6. ¿Cuál tiene mayor concentración de H^+ y cuántas veces?

(Respuesta: La de pH 4,5; $\approx 31{,}62$ veces.)

U01-G07

Un sonido aumenta su nivel en 30 dB. Un sismo aumenta su magnitud en 3. Compara las razones de intensidad sonora y de amplitud sísmica.

(Respuesta: Ambas razones valen 1000, pero miden magnitudes distintas.)

U01-G08

Al medir una pieza de 25 cm se obtienen 24,8 cm. Calcula errores y explica si el relativo cambia al expresar todo en mm.

(Respuesta: 0,2 cm; 0,8%; no cambia.)

Apéndice C

Autoevaluación de 20 preguntas

Una sola respuesta correcta. Anota tus elecciones y justifica las que te hayan generado dudas. La clave está exclusivamente en el documento docente.

Pregunta 1

¿Cuál es irracional?

A) $\sqrt{3}$

B) $1/2$

C) -4

D) $0{,}25$

Pregunta 2

El conjunto $x \geq 2$ es:

A) $(2, +\infty)$

B) $(-\infty, 2]$

C) $[2, +\infty)$

D) $[2, +\infty]$

Pregunta 3

$|-7|$ vale:

A) -7

B) 0

C) 14

D) 7

Pregunta 4

2^{-3} vale:

A) $-1/8$

B) $1/8$

C) 8

D) -8

Pregunta 5

$16^{3/4}$ vale:

A) 8

B) 12

C) 4

D) 64

Pregunta 6

$\log_2 8$ vale:

A) 2

B) 4

C) 3

D) 8

Pregunta 7

$\log(0{,}01)$ vale:

A) 2

B) -1

C) 0

D) -2

Pregunta 8

$\sqrt{18}$ simplificado es:

A) $6\sqrt{3}$

B) $3\sqrt{2}$

C) $9\sqrt{2}$

D) $2\sqrt{3}$

Pregunta 9

El redondeo a centésimas tiene error absoluto máximo:

A) 0,005

B) 0,05

C) 0,5

D) 5

Pregunta 10

$\sqrt{x^2}$ para x real es:

A) x

B) $-x$

C) $|x|$

D) x^2

Pregunta 11

$(-2)^4$ vale:

A) -16

B) 8

C) -8

D) 16

Pregunta 12

-2^4 vale:

A) 16

B) -16

C) 8

D) -8

Pregunta 13

$|x| = 3$ tiene como soluciones:

A) $x = \pm 3$

B) $x = 3$

C) $x = -3$

D) Ninguna

Pregunta 14

$[0, 3] \cap (2, 5)$ es:

A) $[2, 3]$

B) $(2, 3)$

C) $(2, 3]$

D) $[0, 5)$

Pregunta 15

Un aumento del 20% seguido de una bajada del 20%:

A) Deja el valor inicial

B) Aumenta un 4%

C) Reduce un 40%

D) Reduce un 4%

Pregunta 16

0,000045 en notación científica es:

A) $45 \cdot 10^{-6}$

B) $4{,}5 \cdot 10^{-5}$

C) $4{,}5 \cdot 10^{5}$

D) $0{,}45 \cdot 10^{-4}$

Pregunta 17

Tres duplicaciones multiplican la cantidad por:

A) 8

B) 3

C) 6

D) 9

Pregunta 18

Si $[H^+] = 10^{-5}$, el pH es:

A) -5

B) 10

C) 5

D) 0

Pregunta 19

Una diferencia de 20 dB implica una razón de intensidades:

A) 2

B) 20

C) 10

D) 100

Pregunta 20

Una diferencia de magnitud sísmica 2 implica razón de amplitudes:

A) 1000

B) 100

C) 2

D) 20

Revisión personal

Selecciona dos respuestas y explica el procedimiento. Anota un error detectado y una acción concreta para mejorar. No cambies la respuesta sin explicar qué has revisado.